

---

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ХІМІЇ ТА ХІМІЧНІЙ ТЕХНОЛОГІЇ

---

УДК 519.24

Г.О. Сіренко, Д.А. Фундюр, Г.Я. Стефанюк

### Теорія та аналіз випадкових процесів: 1. Коливання та коливальні системи (огляд)

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна*

Дано визначення та класифікація коливання та коливальних систем за механічною, хімічною, термодинамічною тепловою природою. Аналізуються власні та вимушені коливання та їх характеристики. За енергетичною ознакою дана класифікація консервативних, дисипативних, автоколивальних систем. Визначені характеристики коливальних систем за добротністю, логарифмічним декрементом згасання коливань, принципом суперпозиції, числом ступеней вільностей. Детально аналізується кінетика коливань та коливальних процесів, модульованих коливань та коливальних процесів, модуляція за амплітудою, фазою та частотою.

**Ключові слова:** коливання, коливальні системи, модуляція, амплітуда, фаза, частота.

H.O. Sirenko, D.A. Fundyur, H.Ya. Stefanyuk

### The Theory and Analysis of Random Processes: 1. Oscillations and Oscillating System (Review)

*Vasyl Stefanyuk Precarpathian National University,  
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine*

The determination and classification of oscillations and vibration systems for the mechanical, the chemical, thermodynamic heat nature are given. Natural and forced oscillations and their characteristics are analyzed. For energy feature a classification conservative, dissipative, self-oscillating systems. There are defined characteristics of oscillatory systems for the Q-factor, logarithmic decrement damping of oscillations, superposition principle, the number of degrees of freedom. Detailed analysis of the kinetics of vibration and oscillation, modulation amplitude, phase and frequency.

**Key words:** oscillation, oscillating system, modulation, amplitude, phase, frequency.

*Стаття поступила до редакції 20.05.2016; прийнята до друку 15.09.2016.*

## Вступ

1. У багатьох галузях науки та техніки, в Природі науковці та виробники зустрічаються з фундаментальними проблемами теорії випадкових процесів та її застосувань до дослідження: 1) системи автоматичного керування та контролю; 2) акустичних та інших шумів; 3) динаміки споруд, різних конструкцій та приладів; 4) сигналів у каналах зв'язку; 5) різної природи хвиль (повітряних, електромагнітних, електричних тощо); 6) сейсмічних явищ; 7) біологічних систем; 8) трибологічних систем; 9) біометричної інформації; 10) астрофізичних об'єктів та явищ; 11) фізико-хімії

процесів та явищ на поверхнях розділу фаз; 12) хімічних реакцій під час лабораторних або технологічних експериментів; 13) кристалів та кристалічних систем тощо [1].

Під час проведення таких досліджень очевидні суттєві розбіжності між теорією та методами і результатами експериментів – виміряних і підданих аналізу випадкових процесів [1].

2. Статистичним методом планування та аналізу експериментів та порівнянням і оцінкою результатів експериментів вибіркокових та генеральних сукупностей, теоретичному опису та практичної реалізації випадкових процесів присвячено обмежена кількість публікацій [1-45]. Суттєві роз-

біжності існують між аналоговими та дискретними методами аналізу і обробки експериментальних даних. І ці розбіжності не дозволяють зробити точні і надійні висновки та рекомендації.

**3. Науковці та інженери-технологи у фізиці, фізико-хімії, матеріалознавстві та техніці і технології** тощо зустрічаються з коливаннями дуже різними за своєю фізичною природою, характером та ступенями повторювальності, швидкостями змін станів систем, природою та механізмами виникнення та розвитку коливальних процесів [2].

**4. Піонерами досліджень коливальних процесів та коливальних систем є:** маятника – італієць Г. Галілей (початок XVII ст.); голандець Х. Гюйгенс; електромагнітних коливань – В. Томсон (Кельвін) (кінець XIX ст.).

Значний внесок у розвиток теорії випадкових процесів та її використанні під час розв'язання проблем та вирішення технічних завдань зробили: Дж. Бендат та А. Пірсол [1], Г. Лейбфрід [5, 17], Дж. Займан [6], А. Марадудин [7], Л.Д. Ландау та Є.М. Ліфшиц [8, 21], А.А. Андронов та Хайкін [10], С.П. Стрелков [11], Г.С. Горелик [12], Л.П. Тимошенко [13], Дж.П. Ден-Гартог [14], І.М. Бабаков [15], В.А. Красильников [18], Дж.В. Стретт (Релей) [19], К.Ф. Теодорчик [30] тощо.

Технічним застосуванням теорії коливання явилися праці: А.С. Попова (радіочастотні коливання (1895)); П.Н. Лебедєва (електромагнітні коливання надвисокої частоти; ультразвукові коливання; вплив швидкозмінних електричних полів на властивості речовин); А.Н. Крилова (теорія коливання кораблів) тощо. Фундаментальні результати у теорії лінійних та нелінійних коливань мають наукові роботи сучасних вчених Л.І. Мандельштама, Н.Д. Папалекси, Н.Н. Боголюбова, А.А. Андронова тощо. Математичні основи теорії випадкових коливань та процесів у коливальних системах, які привели до важливих практичних результатів, містяться у наукових роботах А.Н. Колмогорова та А.Я. Хинчина тощо.

## I. Коливання

**1. У науці та навчальних дисциплінах** науковці та професори часто подають означення, наприклад: «Атоми часу» – це найменша структурна одиниця часу, яка дорівнює його проміжку, що не перевищує так званої «планківської величини»:  $\Delta\tau_i = 1 \cdot 10^{-43}$ , [с].

Далі постійно будуть подаватися різні означення та класифікації за різними ознаками.

**2. Коливання** – це зміна стану тіл, системи тіл, контуру тощо, які мають певну ступінь свободи та повторення вихідного або змінного стану [1, 2].

**3. Наприклад (рис. 1): вага на жорсткій (рис. 1а) або пружній (рис. 1б) підвісці** під час коливання зліва на право (як маятник) (а) або зверху донизу (б), які повторюються від певного серед-

нього положення відповідно з амплітудою та частотою.

Коливання маятника (рис. 1а) на жорсткій підвісці відбувається за рахунок того, що, надавши вазі певний імпульс, сила тяжіння повертає відхилений маятник у положення рівноваги і, повернувшись у вихідне положення рівноваги, маятник, володіючи швидкістю, за інерцією продовжує рухатися і знову відхиляється від положення рівноваги у протилежний бік від вихідного відхилення [2]. Ці коливання відбуваються за повної амплітуди на початку процесу і уповільнюються внаслідок розсіювання енергії коливань, тертя у підвісці та об повітря самого тіла.

У випадку коливань ваги на пружній підвісці (рис. 1б) коливання відбуваються тому, що пружна сила стискування або розтягу пружини вертає вагу у стан рівноваги і, у наслідок інерції, маючи достатньо енергії, вага проходить рівновагове положення, викликаючи, відповідно, розтяг або стиск пружини [2].

**4. Наприклад (рис. 2): в електричному** коливальному контурі, який має ємність (С) та індуктивність (L), коливання відбуваються тому, що, по-перше, різниця потенціалів між обкладинками зарядженого (q – заряд) конденсатора (С) викликає появу струму (і). Струм протікає по електричному контуру і, по-друге, не припиняє свій потік тоді, коли конденсатор (С) повністю зарядився, бо, завдяки індуктивності (L) струм (і) протікає далі по контуру, перезаряджаючи конденсатор [2, 3].

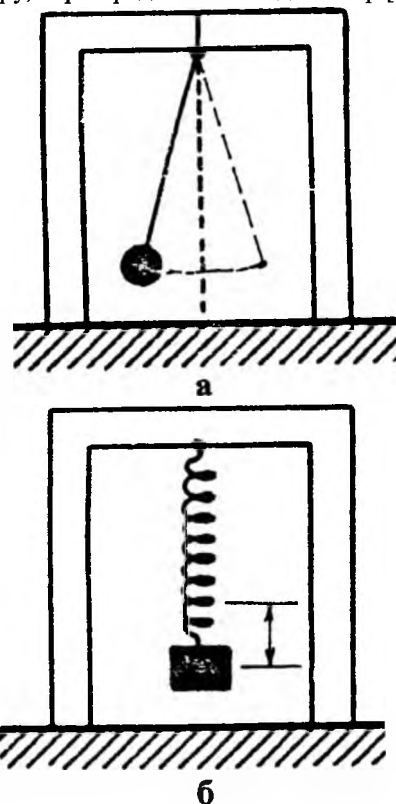


Рис. 1. Схеми механічних коливань ваги на жорсткій (а) та пружній (б) підвісках [2].

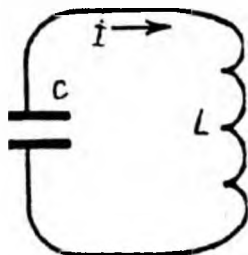


Рис. 2. Електричний коливальний контур: C – ємність; L – індуктивність [2].

Коливання в електричному контурі поступово згасають внаслідок електричного опору матеріалів – провідників електрики контуру, і, відповідно, втрат електричної енергії в конденсаторі (C) та індуктивності (L) [2, 3, 28].

**5. Замітимо, що електромагнітні коливання** у системі струмонесучих провідників можна розглядати незалежно у тому випадку, коли можливо не враховувати електромагнітні поля оточуючого середовища, а розглядати лише рух електричних зарядів у самому провідникові [3]. Принаймні це можливо у квазістационарних системах з розмірами, які малі відносно довжин електромагнітних хвиль [3].

**6. За фізичною природою** розрізняють коливання [1, 2,]:

а) механічні – маятника, корабля на хвилі, моста, струни, хімічного апарату, органа людини тощо;

б) щільності і тиску повітря під час розповсюдження у ньому пружних (акустичних) хвиль;

в) електричного поля атмосфери Землі;

г) електромагнітного твердої частини Землі та коливання земної кори;

г) електроакустичних та електромеханічних аналогів;

д) електромагнітних коливань у коливальному контурі, об'ємному резонаторі, хвильоводі тощо;

е) електромеханічні мембрани телефона;

є) напруженостей електричних та магнітних полів, радіохвиль, хвиль видимого світла та будь-яких інших електромагнітних хвиль.

**7. За хімічною природою** [1, 2] – коливання концентрацій реагентів, швидкостей реакцій, інтенсивностей впливу каталізаторів і промоторів на швидкість хімічних реакцій за періодичними хімічними реакціями тощо.

**8. За термодинамічною тепловою природою** [1, 2], наприклад, «співаюче» полум'я, інші теплові автоколивання в акустиці, реактивних двигунах тощо.

**9. Відомі коливання** [1, 2] світлості (інтенсивності випромінювання) зірок, у метеорології, у радіотехніці, у фізіології (пульсація серця, коливання суглобів), коливання кристалів та кристалічної ґратки, відомі коливання різного роду конструкцій та споруд тощо [1-61].

**10. Коливанням та коливальним процесом** притаманні певні характерні закономірності, які

однакові для коливань різної фізичної, біологічної та хімічної природи тощо. І, як наслідок, виникла галузь науки – теорія коливальних процесів, яка займається теоретичними дослідженнями загальних закономірностей випадкових процесів [2].

Математичний апарат цієї теорії складає система диференціальних рівнянь. Фундаментом випадкових процесів і величин є теорія ймовірностей, математична статистика, теорія планування та аналізу експериментів та пошуку оптимальних рішень [1, 2].

**11. Таким чином, констатуємо:** універсальний характер коливань у Природі та техніці, охоплюючи їх уявлення у фізичних і хімічних явищах та технічних і технологічних процесах, зокрема їх перше-ступеневе значення у пізнанні Всесвіту, судобудуванні, літакобудуванні, електротехніці, техніці автоматичного регулювання та передачі інформації, у техніці фізичних методів дослідження речовин, у радіотехніці та технічній акустиці, фізіології, медицині тощо [2].

**12. Розрізняють власні та вимушені коливання.**

**Власні коливання (вільні коливання) системи** – це коливання в механічній, електричній або у будь-яких інших фізичних коливальних системах, які здійснюються за відсутності зовнішнього впливу, за рахунок початкової накопиченої енергії, внаслідок початкового зміщення або початкової швидкості [40]. Характер власних коливань визначається власними параметрами самої коливальної системи – масою, індуктивністю, ємністю, пружністю тощо [40]. У реальних системах, внаслідок дисипації (розсіяння) енергії, власні коливання системи завжди згасають, а за значних втрат енергії власні коливання системи стають аперіодичними [40].

**Вимушені коливання системи** – це коливання, які виникають у будь-якій системі під дією змінної зовнішньої (щодо системи) сили, наприклад, коливання телефонної системи під дією змінного магнітного поля, коливання механічної конструкції під дією змінного навантаження тощо [45, 46].

Характер вимушених коливань визначається як особливостями дії зовнішньої сили, так й властивостями самої коливальної системи, як реакція на дію зовнішньої сили [45, 46]. На початку дії зовнішньої періодичної сили характер вимушених коливань змінюється у часі і ці коливання не є періодичними, а лише за певним часом дії сил в системі встановлюється періодичними вимушені коливання з періодом, що дорівнює періоду дії зовнішньої сили, при цьому встановлення вимушених коливань у системі відбувається так швидко, наскільки значні згасаючі коливання у самій системі [45, 46].

Зокрема, у лінійних коливальних системах під час включення зовнішньої сили одночасно виникають вільні (або власні) та вимушені коливання,

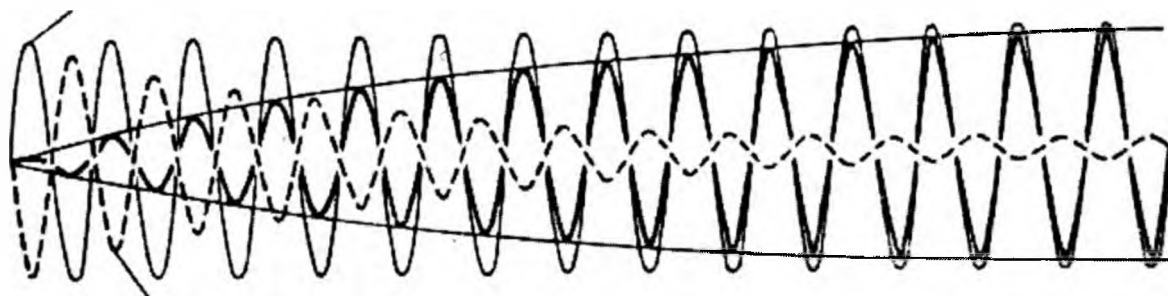


Рис. 3. Поява виключно вимушених коливань під час дії зовнішньої сили на лінійну коливальну систему [45, 46]: власні коливання системи (крискована лінія); вимушені коливання (суцільна лінія).

при цьому амплітуди цих двох коливань у початковий момент рівні, а фази протилежні (рис. 3) [45,46]. Після наступного згасання вільних (власних) коливань, у системі встановлюється лише вимушені коливання [45].

Амплітуда вимушених коливань визначається амплітудою дії зовнішньої сили та процесами згасання власних коливань системи [45, 46]. Якщо згасання малі, то амплітуда вимушених коливань суттєво залежить від співвідношення між частотою даної зовнішньої сили та частотою власних коливань системи [45]. Під час наближення частоти зовнішньої сили до власної частоти коливань системи, амплітуда вимушених коливань різко зростає – настає резонанс [45, 46]. Замітимо, що в нелінійних системах розділити коливання на вимушені і вільні (власні) не завжди можливо [45].

## III. Коливальні системи

**1. До коливальних систем відносять** [26] фізичні системи, в яких, унаслідок порушення стану рівноваги, виникають власні коливання, які обумовлені властивостями самих систем.

**За енергетичною ознакою** коливальні системи класифікують [26] на: консервативні, дисипативні та автоколивальні.

**2. До консервативних систем відносять** [26] такі системи, в яких абсолютно відсутні енергетичні втрати (такі системи можна називати ідеальними моделями реальних систем).

Якщо з достатньою точністю та надійністю можна вважати, що у реальних системах майже відсутні втрати енергії, то такі системи відносять до квазіконсервативних, наприклад: **1) механічні системи без тертя і без випромінювання пружних хвиль;** **2) електромагнітні системи без електромагнітного опору та без випромінювання електромагнітних хвиль.**

**3. До дисипативних систем відносять** [26] такі системи, в яких, вихідна енергія, що надійшла до системи, не залишається сталою в процесі коливань, а перетворюється в іншу форму енергії – термодинамічну роботу, внаслідок чого коливання поступово згасають.

**4. До автоколивальних систем відносять** [12, 26, 29, 30, 35, 36] такі системи, в яких відбувають-

ся не лише втрати енергії, але й поповнення її за рахунок сталих внутрішніх (щодо системи) джерел енергії.

Автоколивання – це незгасаючі коливання, які можуть відбуватися у будь-якій системі за відсутністю змінних зовнішніх чинників впливу, при цьому амплітуда і період автоколивань будуть визначатися властивостями самої системи (цим автоколивання відрізняється від вимушених коливань, амплітуда і період коливань яких визначається характерним впливом зовнішніх чинників) [26].

Автоколивання відрізняються й від вільних (власних) коливань системи (маятника, сили струму в електричному контурі тощо) тим, що, по-перше, вільні коливання поступово згасають, а, по-друге, їх амплітуда залежить від начального «поштовху», який утворює ці коливання [29]. Приклади автоколивань – коливання маятника, коливання струни в смичкових або стовпа повітря в духових музичних інструментах, електричні коливання в ламповому генераторі [12, 29, 30, 35, 36].

**5. Автоколивальні системи, у свою чергу,** класифікують так: 1) коливальні системи у вузькому сенсі; 2) джерело енергії, за рахунок якого підтримуються автоколивання в системі; 3) устрій, що регулює надходження енергії від зовнішнього джерела до коливальної системи [29].

**6. Щоби коливання в системі були незгасаючі,** енергія, яка надходить до системи від зовнішнього джерела енергії, повинна компенсувати втрати енергії в самій системі. Такий баланс надходження і втрат енергії можливий за певних величин амплітуди. Як правило, при значеннях амплітуди коливань, менших за стаціонарну, надходження енергії в коливальну систему перевищує втрати у ній, внаслідок чого амплітуда коливань зростає і досягає стаціонарного значення [29]. Якщо в коливальну систему надходить енергії більше, ніж втрачається у ній при будь-яких малих амплітудах коливань, то відбувається самозбудження коливань у самій системі [29]. І, навпаки, за амплітуд, які перевищують стаціонарні значення, втрати енергії в системі перевищують її надходження із зовнішніх джерел енергії, внаслідок чого амплітуда коливань зменшується до стаціонарного рівня [29]. В обох випадках автоколивання у системі (як і властивості самої системи) є стійкими.

Нестійкість автоколивань у системі можливі за значних різниць амплітуд коливань від стаціонарної – у цих випадках при зменшенні амплітуди втрати перевищують поступлення енергії і, навпаки, під час збільшення амплітуди надходження енергії до системи перевищують її втрати системою [29]. У цих випадках (з-за нестійкості автоколивань) у реальних коливальних системах виникають збурюючі процеси. Такі коливання довго існувати не можуть [29].

**7. Якість коливальної системи** характеризується її добротністю – відношенням кількості енергії, запасеної в коливальній системі, до кількості енергії, що втрачає система за один період коливань [11, 12, 37]. Чим більша добротність коливальної системи, тим менші втрати енергії в системі за одне коливання [37].

**8. Добротність коливальної системи ( $Q^*$ )** зв'язана з логарифмічним декрементом згасання коливань ( $\delta$ ) [декремент (від лат. decrementum – зменшення, спад) – ослаблення збудження у міру його розповсюдження вздовж м'язового або нервового волокна]. Декремент згасання – кількісна характеристика швидкості згасання коливань ( $\delta$ ), яка дорівнює:

$$\delta = \frac{\ln x_1}{x_2}, \quad (1)$$

де  $x_1$ ,  $x_2$  – два послідовних максимальних відхилення коливальної величини в один і той же бік.

**Декремент згасання** – величина, яка зворотня числу коливань, після яких амплітуда коливань зменшується у  $e = 2,71828\dots$  разів [39].

При малих декрементах згасання добротність коливальної системи дорівнює [39]:

$$Q^* \approx \frac{\pi}{\delta}. \quad (2)$$

У коливальному контурі з індуктивністю  $L$ , ємністю  $C$  та омичним опором  $R$  добротність ( $Q^*$ ) коливальної системи дорівнює [37]:

$$Q^* = \frac{1}{R} \left( \frac{L}{C} \right)^{1/2} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega RC}, \quad (3)$$

де  $\omega$  – власна частота коливань контура.

Добротність механічної системи визначається так [37]:

$$Q^* = \frac{\sqrt{mE}}{\mu} = \frac{\omega m}{\mu}, \quad (4)$$

де  $m$  – маса системи;

$E$  – жорсткість системи;

$\mu$  – коефіцієнт тертя у системі.

**9. Добротність є також кількісною** характеристикою резонансних властивостей коливальної системи, яка показує: у скільки разів амплітуда усталених вимушених коливань під час резонансу перевищує амплітуду вимушених коливань на

певній відстані від резонансу, тобто у ділянці наднизьких частот, у якій амплітуду вимушених коливань можна вважати незалежною від частоти [37].

Велике значення добротності характеризує також й суттєву вибірковість коливальної системи, при цьому: чим більша величина добротності, тим буде вузла смуга частот зовнішньої сили, яка може викликати інтенсивні коливання системи [37].

#### **10. Форма автоколивань може бути різною.**

Якщо добротність коливальної системи значна за величиною, тобто втрати енергії в коливальній системі відносно малі, тоді, для підтримки автоколивань у системі, за період коливання повинна надходити мала кількість енергії порівняно із повною енергією коливальної системи [29]. При цьому характер процесів у системі майже не змінюється порівняно з тим, якби енергія взагалі не надходила до системи [29].

У цьому випадку період і форма автоколивань будуть дуже близькі до періоду і форми власних коливань системи [29]. Якщо власні коливання системи за формою близькі до гармонійних, то автоколивання теж близькі до гармонійних коливань [29].

**11. Якщо добротність коливальної системи мала**, то для підтримки автоколивань до системи повинно надходити значна кількість енергії порівняно з енергією самої системи, що може значно змінити характер процесів системи, зокрема форма автоколивань може значно відрізнятись від синусоїдальної [29].

Якщо за період автоколивань розсіюється вся накопичена в коливальній системі енергія, то сама система вже буде неколивальною, а аперіодичною, то автоколивання будуть дуже сильно відрізнятись за формою від синусоїдальних, тобто перетворюються у релаксаційні коливання [29, 41-44].

**12. Релаксаційні коливання виникають** у коливальних системах, у яких суттєву роль грають дисипативні сили, наприклад, внутрішнього та зовнішнього тертя (в механічних системах), активного електричного опору (в електричних системах) тощо [41].

Дисипація енергії, що обумовлена дисипативними силами, приводить до того, що енергія, яка накопичена в одному з двох (або більшій кількості) накопичувачів, які входять до складу автоколивної системи, не переходить повністю до другого накопичувача (або кількох накопичувачів), як це має місце у системах з гармонічними коливаннями, а пасивується у системі, перетворюючись в інші форми енергії – тепло або роботу [41-44].

Релаксаційні коливання, як і будь-які автоколивання, можливі лише в нелінійних коливальних системах, і тому для їх математичного опису застосовують апарат нелінійної теорії коливань [41].

**13. Можливість досягнення балансу енергії** реалізується лише за певними значеннями амплітуди коливань і обумовлена наявністю в коливаль-

ній системі нелінійного елемента, властивості якого залежать від стану системи, наприклад, електричного опору, який залежить від прикладеної до елемента напруги [29].

**14. У загальному випадку параметри** коливальної системи (маса, сміність, пружність тощо) залежать від процесів, які у системі відбуваються. Такі коливальні системи можуть бути описані нелінійними рівняннями, тому ці системи відносять до нелінійних [2].

**15. Коливальні системи, параметри** яких з достатньою точністю та надійністю можна вважати незалежними від процесів, що відбуваються в коливальних системах, можуть бути описані лінійними рівняннями, а самі системи називають лінійними [2]. Основною характеристикою лінійних коливальних систем є виконання нею **принципу суперпозиції** [2].

Загалом принцип суперпозиції – це принцип накладання, який полягає у припущенні, що, якщо складові складної коливальної системи (чи складного процесу впливу) взаємно не впливають один на одного, то результируючий ефект буде дорівнювати сумі ефектів, які викликані кожною складовою впливу окремо [31-34].

Для прикладу: якщо середовище (система), в якому розповсюджується хвиля (S) лінійна, тобто її властивості не змінюються під дією збурень, які обумовлені хвилею, то всі ефекти, що викликані негармонійною хвилею, можна визначити як суму ефектів, які викликані кожною з її гармонійних складових [31-34]:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \dots \quad (5)$$

**16. Коливальні системи класифікують** також за числом ступенів вільностей, тобто за числом незалежних параметрів – узагальнених координат, визначаючих стан коливальної системи [26].

Якщо число таких параметрів (f) кінцеве, то коливальні системи означають як дискретні системи з f – ступенями вільностей [26].

Граничний випадок, коли  $f \rightarrow \infty$  відноситься до розподілених коливальних систем (струна, мембрана, електричний кабель, суцільні об'ємні системи тощо).

**17. Загальні властивості коливальних систем та загальні закономірності коливальних процесів, які відбуваються в них, і складають науковий предмет теорії коливань** [26].

### III. Кінетика коливань та коливальних процесів

**1. Загалом розрізняють такі види коливань та коливальних процесів** (рис. 4): загальні періодичні (а); прямокутні (б); пилообразні (в); синусоїдальні (г); спадаючі (згасаючі) (д); зростаючі (е); амплітудно-модульовані (ж); частотно-модульовані (з); модульовані за амплітудою та за фазою (и);

з випадковими функціями за амплітудою та за фазою (к); неупорядковані (л) [21]. У цих видах коливань коливальна величина (S) може бути будь-якої фізичної, хімічної або біологічної тощо природи, наприклад, механічне зміщення тіла, густина газу або рідини, сила електричного струму, електрична напруга, швидкість хімічної реакції, концентрація проміжних продуктів хімічної реакції тощо.

**2. Так, для загального виду періодичних коливань** (рис. 4а) будь-яке значення коливальної величини (S) повторюється необмежене число раз через однакові проміжки часу (t):  $t = T$  [2, 21]:

$$S(t + T) = S(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (6)$$

де T – період коливань;  
t – частота коливань.

**3. Окремими випадками періодичних коливань є:**

- 1) прямокутні коливання (рис. 4б);
- 2) пилообразні коливання (рис. 4в);
- 3) синусоїдальні коливання (рис. 4г).

**4. Для синусоїдальних коливань** (рис. 4г) коливальна величина (S) змінюється за законом [2, 21]:

$$S = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (7)$$

де A,  $\omega$ ,  $\varphi$  – сталі величини;  
A (максимальне значення величини S) – амплітуда коливань;  
 $(\omega t - \varphi)$  – фаза коливань (функція часу);  
 $\varphi$  – початкова фаза.

Так як значення  $\cos(\omega t - \varphi)$  повторюється під час зростання аргументу на  $2\pi$ , то  $\omega t = 2\pi$ , звідки циклічна (кругова) частота означена так [2]:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (8)$$

Циклічна частота дорівнює числу коливань за  $2\pi$  одиниць часу.

**5. Для спадаючих (згасаючих, затухаючих) коливань** (рис. 4д) коливальна величина (S) визначається за [2, 21] так:

$$S = A \exp(-\delta t) \cos(\omega t - \varphi), \quad (9)$$

де A,  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  – сталі величини;  
A – початкова амплітуда;  
 $A \exp(-\delta t)$  – миттєве значення амплітуди;  
 $\delta$  – коефіцієнт згасання коливань (декремент згасання коливань);  
 $1/\delta = \tau$  – часова стала, де  $\delta$  (у даному випадку) – позитивна величина [а при негативному значенні  $\delta$  спостерігається явище зростання коливань (рис. 4е)];  
 $(\omega t - \varphi)$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  мають означення, як і під час розгляду синусоїдальних коливань (рис. 4г);  
 $T = 2\pi/\omega$  – період коливань, незважаючи на те, що згасаючі коливання не є періодичними.

**6. У фізиці, хімії, фізико-хімії, матеріалознавстві, техніці та технології, радіотехніці тощо мають велике значення модульовані коливання виду** [2, 21, 47-51]:

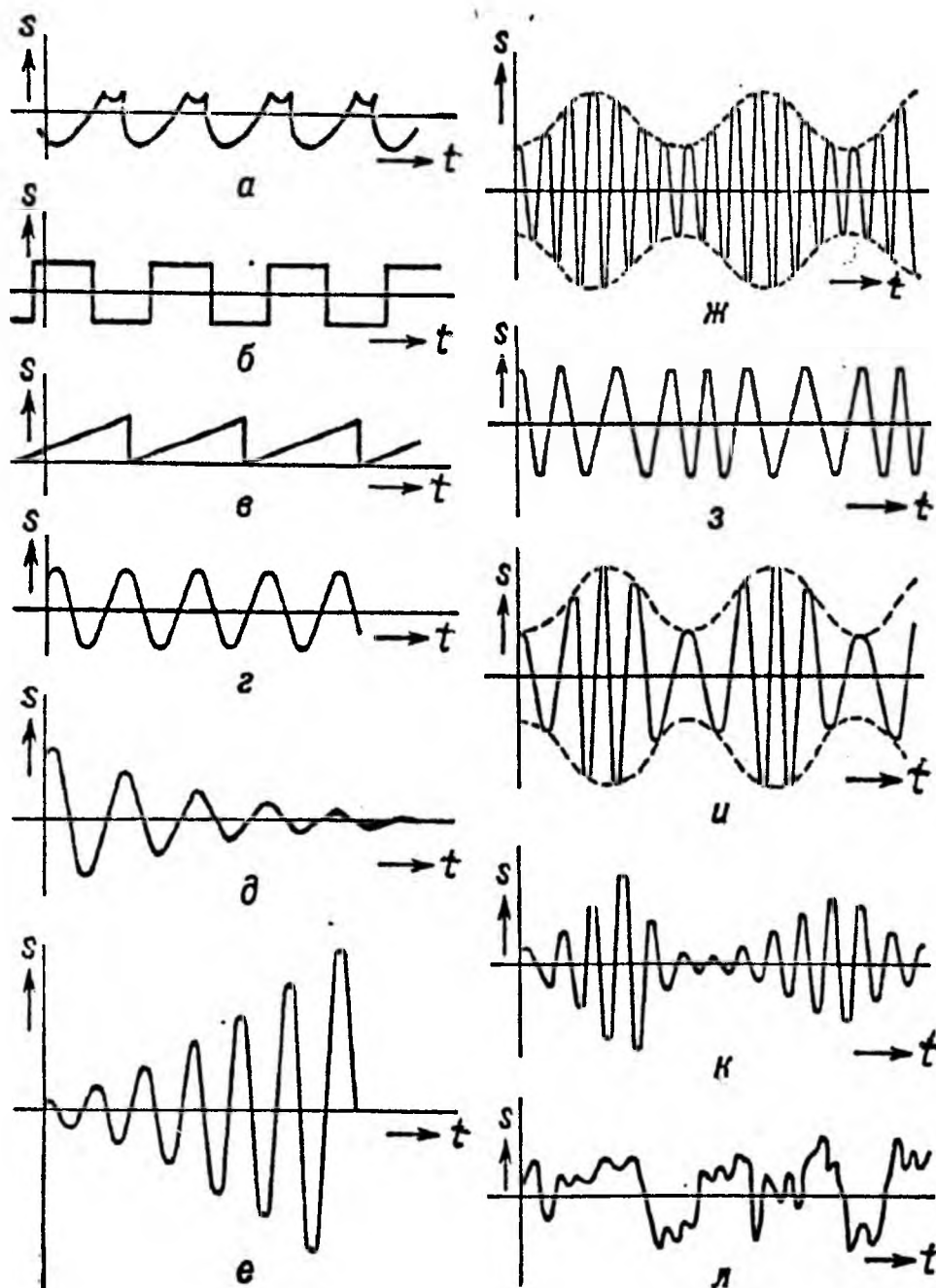


Рис. 4. Види коливань: *a* – загальний випадок періодичного коливання; *б* – прямокутні; *в* – пилообразні; *г* – синусоїдні; *д* – спадаючі; *е* – зростаючі; *ж* – амплітудно-модульовані; *з* – частотно-модульовані; *и* – модульовані за амплітудою та за фазою; *к* – з випадковими функціями за амплітудою та за фазою; *л* – неупорядковані (*s* – коливальна величина; *t* – час).

$$S = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)]. \quad (10)$$

У (9) функція  $A(t)$  та  $\varphi(t)$  змінюється повільно, порівняно з величиною  $\cos(\omega t - \varphi)$ , де  $\omega$  є сталою величиною.

**Модуляція** [від лат. *modulatio* – мірність, розмірність] у фізиці, фізико-хімії, техніці – це зміна (за певним законом) у часі коливальної величини, яка характеризує будь-який регулярний процес, що викликається зовнішніми впливами [48].

Модуляція коливань – це повільна (порівняно з періодом коливань) зміна амплітуди, частоти

або фази за певним законом, тому розрізняють (рис. 5): немодульовані коливання (*a*); амплітудно-модульовані коливання (*в*); частотно-модульовані коливання (*г*); та фазово-модульовані коливання (*д*). На (рис. 5б) [50] показаний модулюючий сигнал.

За будь-яким способом модуляції коливань швидкість зміни амплітуди, частоти або фази повинна мати малі величини, щоби за період коливань модульований параметр майже не змінився [50].

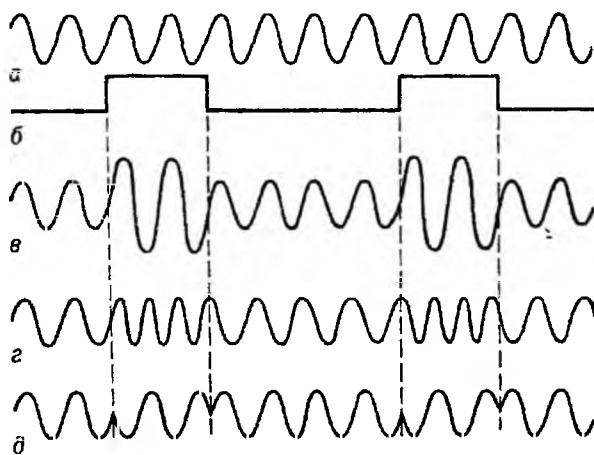


Рис. 5. Схема модульованих коливань: а – немодульоване коливання; б – модулюючий сигнал; в – амплітудно-модульоване коливання; г – частотно-модульоване коливання; д – фазово-модульоване коливання [50].

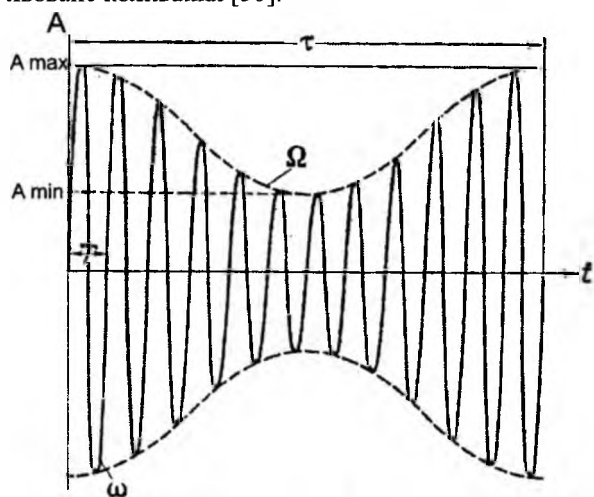


Рис. 6. Схема амплітудної модуляції синусоїдальним сигналом [50].

7. У випадку амплітудно-модульованих коливань (рис. 5в) розглянемо модуляцію амплітуди  $A$  синусоїдального сигналом. Рівняння модульованого коливання (рис. 6) запишеться так [50]:

$$x = A_0 \{ [1 + m \sin(\Omega t)] [\sin(\omega t + \varphi)] \}, \quad (11)$$

де  $A_0$  – амплітуда вихідного коливання;  
 $\omega$  – частота вихідного (несучого) коливання;  
 $\Omega$  – частота модуляції;  
 $m$  – ступінь зміни амплітуди [50]:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}; \quad (12)$$

$A_{\max}, A_{\min}$  – максимальне та мінімальне значення амплітуди коливань відповідно.

Частота модуляції ( $\Omega$ ) повинна бути набагато меншою за вихідну (несучу) частоту ( $\omega$ ) [50], при цьому модульовані коливання вже стають несинусоїдальними. Амплітудно-модульовані коливання у простому випадку уявляють собою суму трьох синусоїдальних коливань з частотами  $\omega$ ;

( $\omega + \Omega$ ); ( $\omega - \Omega$ ), при цьому коливання з частотою  $\omega$  носить назву несучого (основного) з амплітудою, яка дорівнює амплітуді  $A_0$  вихідного коливання, а коливання з частотами ( $\omega + \Omega$ ) та ( $\omega - \Omega$ ) – бічних частот (або ступінь частот) з амплітудою  $(mA_0)/2$  кожне [50].

Якщо модулюючий сигнал не є синусоїдальним, а більш складний, то в модульованому коливанні будуть дві бокові смуги, частотний склад яких визначається частотним спектром модулюючого сигналу [50].

8. Якщо у виразі (10)  $\varphi(t) = \text{const}$ , то коливання буде носити назву амплітудно-модульованого (рис. 4ж) [2, 47-51].

9. Якщо у виразі (10)  $A(t) = \text{const}$ , то коливання носять назву модульованих за фазою, або модульованих за частотою (рис. 4з) [2, 47-51].

10. У випадку фазової модуляції рівняння фазово-модульованого коливання має вигляд [50]:

$$X = A_0 \sin [(\omega_0 t) + \Delta\varphi \cos(\Omega t)]. \quad (13)$$

11. У випадку частотної модуляції синусоїдальним сигналом частоти коливань змінюється за законом [50]:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t), \quad (14)$$

де  $\cos(\Omega t)$  – сигнал модуляції;  $\Delta\omega$  – девіація частоти (або просто девіація) [(від лат. deviation – відхилення) – відхилення частот коливань від середнього значення (у частотній модуляції девіацією частоти є максимальне відхилення частоти [52, 53])].

Від величини девіації частот суттєво залежить склад та значення амплітуд складових спектру частотно-модульованого коливання [53].

12. За частотної модуляції смуга частот модульованого коливання залежить від величини – індексу частотної модуляції [50]:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega}. \quad (15)$$

За  $\beta \ll 1$  правдиве наближення такого співвідношення [50]:

$$X \approx A_0 [\sin(\omega t) + \beta \sin(\Omega t) \cos(\omega t)]. \quad (16)$$

У цьому випадку частотно-модульоване коливання (як і амплітудно-модульоване) складається із вихідної (несучої) частоти  $\omega$  та двох супутникових коливань з частотами ( $\omega + \Omega$ ) та ( $\omega - \Omega$ ) [50].

Тому, за малих значень індексу  $\beta$  смуги частот, які зайняті амплітудно-модульованими та частотно-модульованими сигналами однакові.

За великих значень індекса  $\beta \gg 1$  спектр бокових частот значно збільшується, тоді, окрім коливань з частотами ( $\omega \pm \Omega$ ), з'являється коливання з частотами ( $\omega \pm 2\Omega$ ), ( $\omega \pm 3\Omega$ ) тощо [50].

13. Повна ширина смуги частот, що займають частотно-модульовані коливання (спектр, сигнал) з девіацією  $\Delta\omega$  та частотою модулювання  $\Omega$ , (з точністю достатньою до практичної доцільності) [50]:

$$2 \Delta\omega + 2\Omega. \quad (17)$$



Ця смуга частот завше ширша за смугу частот при амплітудній модуляції [50].

Перевага частотної модуляції перед амплітудною модуляцією у прикладному значенні є більш перешкодостійкою, що явно проявляється за  $\beta \gg 1$ , тобто тоді, коли смуги частот, що займають частотно-модульований спектр коливань, набагато більша за  $2\Omega$  [50].

**14. Якщо модульований сигнал синусоїдальний**, то форма модельових коливань та їх спектральний склад при частотній та фазовій модуляціях однакові [50].

Якщо модульований сигнал несинусоїдальний, то ця відмінність між частотною та фазовою модуляціями явно виражена [50].

**15. У загальному випадку** (рис. 4и) коливання модульовані як за амплітудою, так і за фазою [2, 47-51].

**16. Рис. 4 ж, з, и відповідають** періодичній амплітудній (ж) і частотній (з) модуляціям та модуляції за амплітудою та фазою (и), при цьому  $A(t)$ ,  $\varphi(t)$  є періодичні функції [2, 47-51].

**17. У згаданих вище галузях науки і техніки** важливі випадки у коливальних процесах, коли функції амплітуди та частоти  $A(t)$  або  $\varphi(t)$ , чи  $A(t)$

та  $\varphi(t)$  одночасно є випадковими функціями (рис. 4к) [2, 47-51].

**18. Часто в науці, техніці та Природі** зустрічаються неупорядковані або квазіупорядковані коливальні процеси та системи (рис. 4л), наприклад, видиме (біле) світло, електричний або акустичний «білий шум», чи сигнал від анізотропної шорсткої поверхні тощо. Ці коливання містять компоненти «білого шуму» тощо [2, 47-51].

**19. Ні у Природі, ні у наукових експериментах**, ні у техніці, ні у технології не зустрічаються правдиво періодичні, зокрема гармонійні, коливальні процеси [2], але від цих ідеалізованих коливань реальні коливання мало відрізняються на протязі довгого часу.

До гармонійних коливань близькі спектральні коливання під час дослідження речовин фізичними методами (ЕПР, ЯМР, КПЯР, ІЧ тощо), при цьому часто різні коливання мають однакову фізичну природу, але різні частоти та інші особливості, і тому вони різні за властивостями та по-різному впливають на фізичні системи та живі організми, зокрема на органи почуттів (зір, слух, дотик тощо) [2].

## Література

1. Дж. Бендат, А. Пирсол, Измерение и анализ случайных процессов (Мир, Москва, 1971 (1-е изд.); 1977 (2-е изд.)).
2. Г.С. Горелик, БСЭ: Колебания, 12, 409 (1973).
3. БСЭ: Электрические колебания, 30, 39 (1978).
4. Я.А. Иосилевский, БСЭ: Колебания кристаллической решётки, 12, 411 (1973).
5. Г. Лейбфрид, Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов (Москва, 1963).
6. Дж. Займан, Электроны и фотоны (Москва, 1962).
7. А. Марадудин, Дефекты и колебательный спектр кристаллов (Москва, 1968).
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика (Москва, 1964).
9. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела (Москва, 1963).
10. А.А. Андронов, С.Э. Хайкин, Теория колебаний (Москва, 1937).
11. С.П. Стрелков, Введение в теорию колебаний (Москва, 1951 (1-е изд.); 1954 (2-е изд.)).
12. Г.С. Горелик, Колебания и волны (Москва, 1959).
13. Л.П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле (Москва, 1967).
14. Дж.П. Ден-Гартог, Механические колебания (Москва, 1960).
15. И.М. Бабаков, Теория колебаний (Москва, 1968).
16. Дж. Займан, Принципы теории твердого тела (Москва, 1966).
17. М.В. Классен-Неклюдова, А.А. Урусовская, БСЭ: Дефекты в кристаллах, 8, 172 (1972).
18. В.А. Красильников, Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах (Москва, 1951).
19. Дж.В. Стрэтт (Рэлей), Терия звука (Москва, 1940-1944).
20. Е.С. Сорокин, БСЭ: Колебание конструкций, 12, 411 (1973).
21. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория упругости (Москва, 1965).
22. БСЭ: Колебания широты, 12, 413 (1973).
23. БСЭ: Колебательная скорость, 12, 413 (1973).
24. БСЭ: Колебательное смещение, 12, 413 (1973).
25. В.В. Білоусов, БСЭ: Колебательное движение Земли. 12, 413 (1973).
26. БСЭ: Колебательные системы 12, 414 (1973).
27. БСЭ: Колебательные спектры, 12, 414 (1973).
28. В.Н. Парыгин, БСЭ: Колебательный контур, 12, 414 (1973).
29. С.Э. Хайкин, БСЭ: Автоколебания, 1, 122 (1970).
30. К.Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы (Москва, 1952).

31. О.И. Заявлялов, БСЭ: Суперпозиции принцип, 25, 82 (1976).
32. П.А.М. Дирак, Принципы квантовой механики (Москва, 1960).
33. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика (Москва, 1974).
34. С. Швевбер, Введение в релятивистскую квантовую теорию (Москва, 1963).
35. В.В. Мигулин, БСЭ: Генерирование электрических колебаний, 6, 226 (1971).
36. А.А. Харкевич, Автоколебания (Москва, 1954).
37. В.Н. Парыгин, БСЭ: Добротность колебательной системы, 8, 377 (1972).
38. Б.И. Ходоров, БСЭ: Декремент, 8, 52 (1972).
39. В.Н. Парыгин, БСЭ: Декремент затухания, 8, 52 (1972).
40. БСЭ: Собственные колебания, 24, 13 (1976).
41. БСЭ: Релаксационные колебания, 21, 621 (1975).
42. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, Теория колебаний (Москва, 1959).
43. Л.А. Меерович, Л.Г. Зеличенко, Импульсная техника (Москва, 1954).
44. И.М. Копчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике (Москва, 1954).
45. БСЭ: Вынужденные колебания, 5, 529 (1971).
46. С.Э. Хайкин, Физические основы механики (1971).
47. М.Д. Карасёв, БСЭ: Модулятор, 16, 407 (1974).
48. БСЭ: Модуляция в физике и технике, 16, 408 (1974).
49. Ю.Н. Тюлин, БСЭ: в музыке, 16, 408 (1974).
50. В.Н. Парыгин, БСЭ: Модуляция колебаний, 16, 409 (1974).
51. И.И. Андрианова, БСЭ: Модуляция света, 16, 410 (1974).
52. БСЭ: Девиация, 8, 9 (1972).
53. БСЭ: Девиация частоты, 8, 9 (1972).
54. БСЭ: Комбинационные колебания, 12, 494 (1973).
55. М.М. Сущинский, БСЭ: Комбинационное рассеяние света, 12, 493 (1973).
56. Н.Н. Кристофель, БСЭ: Спектры кристаллов, 24, 304 (1976).
57. М.А. Ельяшевич, БСЭ: Спектры оптические, 24, 305 (1976).
58. М.А. Ельяшевич, БСЭ: Молекулярные спектры, 16, 459 (1974).
59. В.Н. Кондратьев, Структура атомов и молекул (Москва, 1959).
60. М.А. Ельяшевич, Атомная и молекулярная спектроскопия (Москва, 1962).
61. Г. Герцберг, Электронные спектры и строение многоатомных молекул (Москва, 1969).
62. Д.С. Шрайбер, БСЭ: Дефекты металлов, 8, 172 (1972).
63. Х.Г. ван Бюрен, Дефекты в кристаллах (Москва, 1962).
64. Д. Халл, Введение в дислокации (Москва, 1968).
65. Вакансии и другие точечные дефекты в металлах и сплавах (Москва, 1961).
66. Некоторые вопросы физики пластичности кристаллов (Москва, 1960).
67. Я.Е. Гегузин, Макроскопические дефекты в металлах (Москва, 1962).
68. А.Н. Орлов, БСЭ: Дислокации в кристаллах, 8, 301 (1972).
69. Ж. Фридель, Дислокации (Москва, 1967).
70. Дж. Хирт, И. Лоте, Теория дислокаций (Москва, 1974).
71. П.М. Зоркий, БСЭ: Ионные кристаллы, 10, 375 (1972).
72. В.А. Киреев, БСЭ: Ионная связь, 10, 374 (1972).
73. Н.Н. Делягин, БСЭ: Мессбауэра эффект, 16, 103 (1974).
74. Н.Ф. Степанов, БСЭ: Симметрия в химии, 23, 394 (1976).
75. С.С. Герштейн, БСЭ: Симметрия в физике, 23, 392 (1976).
76. Б.К. Вайнштейн, БСЭ: Симметрия кристаллов, 23, 396 (1976).
77. К.С. Александров, БСЭ: Кристаллофизика, 13, 442 (1973).
78. П.М. Зоркий, БСЭ: Кристаллохимия, 13, 443 (1973).
79. А.И. Китайгородский, Органическая кристаллохимия (Москва, 1955).
80. Б.Ф. Ормонт, Введение в физическую химию и кристаллохимию полупроводников (Москва, 1968).
81. Г. Кребс, Основы кристаллохимии неорганических соединений (Москва, 1971).
82. М.П. Шаскольская, Б.К. Вайнштейн, БСЭ: Кристаллы, 13, 444 (1973).
83. БСЭ: Кристаллы в клетках растений, 13, 447 (1973).
84. М. Шаскольская, Кристаллы (Москва, 1959).
85. Ч. Банн, Кристаллы (Москва, 1970).
86. А.А. Чернов, Кристаллизация, 13, 434 (1973).
87. М.П. Петров, БСЭ: Кристаллическое поле, 13, 439 (1973).
88. Б.К. Вайнштейн, А.А. Гусев, БСЭ: Кристаллическая решетка, 13, 438 (1973).
89. М.П. Шаскольская, БСЭ: Кристаллография, 13, 440 (1973).
90. Х.С. Богдасаров, БСЭ: Монокристалл, 16, 527 (1974).

91. Г. Бакли, Рост кристаллов (Москва, 1954).
92. Р.А. Лодиз, Р.Л. Паркер, Рост монокристаллов (Москва, 1973).
93. Дж. Маллин, Кристаллизация (Москва, 1966).
94. А.В. Шубников, Образование кристаллов (Москва-Ленинград, 1974).
95. А.Л. Ройтбурд, БСЭ: Поликристалл, 20, 201 (1975).
96. Г.В. Бокий, Кристаллохимия (Москва, 1971).

*Сіренко Геннадій Олександрович* – заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, академік Академії технологічних наук України, професор кафедри неорганічної та фізичної хімії.

*Фундюр Дарія Андріївна* – студентка IV курсу кафедри неорганічної та фізичної хімії.

*Стефанюк Ганна Яківна* – студентка IV курсу кафедри неорганічної та фізичної хімії.