Карпатські математичні публікації. Т.4, №2 | Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Тарас О.Г.

АЛГЕБРИ БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Тарас О.Г. *Алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 340–346.

В роботі розглянуто алгебри блочно-діагональних аналітичних функцій на просторах ℓ_1 та ℓ_2 та досліджено спектри цих алгебр.

Вступ

Нехай X — банаховий простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $H_b(X)$ — алгебра аналітичних функцій обмеженого типу на X, тобто $H_b(X)$ складається з аналітичних функцій, обмежених на обмежених підмножинах в X. $M_b(X)$ – множина ненульових лінійних мультиплікативних функціоналів (характерів) на $H_b(X)$. Множину $M_b(X)$ також називають спектром алгебри $H_b(X)$ (див. [1, 3]).

Відомо, що $H_b(X)$ є проективною границею банахових алгебр $H^\infty_{uc}(B_r)$ — рівномірно неперервних аналітичних функцій на кулі $B_r \subset X, r \in \mathbb{N}$. Зокрема $H_b(X) = \cap H^\infty_{uc}(B_r)$. Тому $M_b(X)$ є індуктивною границею множин $M_b(B_r)$ характерів $H^\infty_{uc}(B_r)$. Зокрема, (див. [2]),

$$M_b(X) = \cup M_b(B_r).$$

Позначимо A_n — алгебру, породжену поліномами степеня $\leq n$, зокрема A_1 — алгебра, породжена лінійними функціоналами і сталими функціями. Нехай I_n — ідеал, породжений n-однорідними поліномами з A_n. Легко бачити, що $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ (див. [6]).

Теорема 1. *[5] Існує характер $\varphi \in M_b(X)$, який розділяє ідеали $I_k \neq I_{k+1}$, тобто $\varphi(I_k) = 0, \varphi(I_{k+1}) \neq 0$.*

Ця теорема є одним з результатів, що дозволяє описати елементи спектру алгебри $H_b(X)$. Проте, у явному вигляді важко зобразити конкретні елементи $M_b(X)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: спектр, множина максимальних ідеалів, блочно-діагональні аналітичні функції, поліном, простір ℓ_1.

1 Підмножина $\mathcal{N}_m$ банахового векторного простору

Нехай X — банаховий простір з топологічним базисом Шаудера $\{e_k\}$. Розглянемо підмножини X:

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(X) = \bigcup_k \{\lambda e_k, \lambda \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(X) = \bigcup_{k \neq j} \operatorname{span}(e_k, e_j) = \bigcup_{k,j} (\mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}e_j),$$
$$\dots$$
$$\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_m(X) = \bigcup_{k_1 \neq \ldots \neq k_m} \operatorname{span}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}) = \bigcup_{k_1 \neq \ldots \neq k_m} (\mathbb{C}e_{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_{k_m}),$$
$$\dots .$$

Зауваження 1.1. *Якщо простір X є скінченновимірним, то $\mathcal{N}_m = X$, для $m = dimX$.*

Нехай $H_b(\mathcal{N}_m)$ — алгебра звужень функцій з $H_b(X)$ на $\mathcal{N}_m$, $M_b(\mathcal{N}_m)$ — відповідна множина характерів. Аналогічно, як у випадку $H_b(X)$ алгебру $H_b(\mathcal{N}_m)$ (див. [2]) можна розглядати як перетин рівномірних алгебр $H^\infty_{uc}(\mathcal{N}_m(r))$, де $\mathcal{N}_m(r) = B(r) \cup \mathbb{N}_m, r \in \mathbb{N}$:

$$H_b(\mathcal{N}_m) = \cap H^\infty_{uc}(\mathcal{N}_m(r)),$$
$$M_b(\mathcal{N}_m) = \cup M_b(\mathcal{N}_m(r)).$$

Легко бачити, що оператор звуження $T_m : H_b(X) \to H_b(\mathcal{N}_m)$ є гомоморфізмом алгебр. Відомо, що ядро кожного гомоморфізму є ідеал і тому $H_b(\mathcal{N}_m)$ є фактор-простором по ядру $\mathrm{Ker}T_m$ гомоморфізму T_m:

$$H_b(\mathcal{N}_m) = H_b(X)/\mathrm{Ker}T_m.$$

Твердження 1.1. *Нехай $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, тоді φ можна продовжити до характера $\tilde{\varphi}$ на $H_b(X)$ за формулою: $\tilde{\varphi} = \varphi \circ T_m$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_m)$, T_m — гомоморфізм, то $\varphi \circ T_m$ також є лінійним мультиплікативним функціоналом і $\varphi \circ T_m : H_b(X) \to \mathbb{C}$, тому $\varphi \circ T_m$ — характер з $M_b(X)$. Оскільки $\varphi \circ T_m$ можна вважати продовження φ у $M_b(X)$, то $\tilde{\varphi} := \varphi \circ T_m$. □

Таким чином, вивчення спектру алгебри $H_b(X)$ можна звести до вивчення вужчої множини — спектру алгебри $H_b(\mathcal{N}_m)$ і спробувати узагальнити отримані результати на $H_b(X)$.

Використовуючи біноміальну формулу, запишемо загальний вигляд n-однорідного полінома $P \in P(^nX)$ для довільного $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X$:

$$P(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_m} \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} x^{n_1}_{k_1} \ldots x^{n_m}_{k_m} \overline{P}(e^{n_1}_{k_1}, \ldots, e^{n_m}_{k_m}), \tag{1}$$

де $\overline{P}$ — симетрична n-лінійна форма, яка відповідає поліному P.

На підмножинах $\mathcal{N}_m$ простору X загальний вигляд поліномів дещо простіший:

$$P \in P(^n\mathcal{N}_1) : P(x) = \sum_k \sum_n C_k x_k^n,$$
$$P \in P(^n\mathcal{N}_2) : P(x) = \sum_{k\neq j} \sum_m a_{kj} x_k^{n-m} x_j^m,$$
$$\dots,$$
$$P \in P(^n\mathcal{N}_m) : P(x) = \sum_{k_1\neq\ldots\neq k_m} \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} a_{n_1}\ldots a_{n_m} x_{k_1}^{n_1}\ldots x_{k_m}^{n_m},$$
$$\dots.$$

Тобто фактично від полінома $P(x) \in P(^nX)$ при обмеженні на $\mathcal{N}_m$ залишається тільки його m-вимірна "діагональ". Такі поліноми називають блочно-діагональними (див.[4]) або діагональними у випадку $m = 1$.

Твердження 1.2. *Простір поліномів $P(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$ ізоморфний до простору поліномів $P(^mX)$:*

$$P(^m\mathcal{N}_m) \cong P(^mX). \tag{2}$$

Доведення. Нехай $x = \sum_k x_k e_k$. Для доведення ізоморфності достатньо показати, що оператор звуження $T_m : X \to \mathcal{N}_m$ є бієктивним та неперервним. Неперервність випливає автоматично з обмеженості оператора. Всі поліноми $P(x)$ розглядаємо на одиничних базисних векторах $e_1, \ldots, e_k, \ldots$, тобто на одиничній кулі, тому $||P|| = 1$.

Оператор T_m є інєктивним тоді і тільки тоді, коли ядро цього оператора $\mathrm{Ker}T_m$ складається тільки з $\{0\}$. Знайдемо множину поліномів, для яких $T_m(P) = 0$. Запишемо загальний вигляд полінома (1), звуженого на $\mathcal{N}_m$. Для довільного $x \in \mathcal{N}_m$ існує набір базисних векторів $e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}$ такий, що $x = x_{k_1}e_{k_1} + \ldots x_{k_m}e_{k_m}$. Тому

$$P(x) = P(\lambda_{k_1}e_{k_1} + \ldots \lambda_{k_m}e_{k_m}) = \sum_{n_1+\ldots+n_m=m} \lambda_{k_1}^{n_1}\ldots\lambda_{k_m}^{n_m} P(e_{k_1}^{n_1}, \ldots, e_{k_m}^{n_m}).$$

Даний добуток буде дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли для всіх $k_1, \ldots, k_m$ значення $\overline{P}(e_{k_1}^{n_1}, \ldots, e_{k_m}^{n_m})$ в рівності (1) буде дорівнювати нулю. Серед поліномів степеня m — це тільки нульові поліноми. Це означає, що $\mathrm{Ker}T_m = \{0\}$ в просторі $P(^mX)$.

Оскільки T_m є оператором звуження, тому для кожного образа оператора з $P(^m\mathcal{N}_m)$ існує прообраз з $P(^mX)$ і T_m є бієктивним оператором. А, отже, T_m — ізоморфізм. Це і доводить ізоморфність просторів $P(^m\mathcal{N}_m)$, $\mathcal{N}_m \subset X$ і $P(^mX)$. □

Теорема 2. *Для кожного характера $\psi \in M_b(X)$ існує послідовність $\varphi_m \in M_b(\mathcal{N}_m)$ така, що послідовність продовжень $\widetilde{\varphi}_m \in M_b(X)$ збігається до ψ в слабко поліноміальній топології. Тобто, $\varphi_m(P) \to \psi(P)$ при $m \to \infty$ для кожного полінома $P \in H_b(X)$.*

Доведення. Позначимо ψ_m — звуження функціонала ψ на $P(^{\leq m}\mathcal{N}_m)$ — простір поліномів степеня $\leq m$ на $\mathcal{N}_m$. Оскільки простір $P(^m\mathcal{N}_m)$ ізоморфний простору $P(^mX)$ відносно оператора звуження T_m для кожного натурального m, то функціоналу ψ_m відповідає функціонал $\varphi_m \in P(^{\leq m}\mathcal{N}_m)^*$ такий, що $\widetilde{\varphi}_m = \psi \circ T_m$. Нехай P — поліном степеня n. Тоді, для $m \geq n$, $\psi(P) = \psi_m(P) = \psi_m \circ T(P) = \widetilde{\varphi}_m(P)$. Оскільки T — гомоморфізм, то $\widetilde{\varphi}_m$ — гомоморфізми і, отже φ_m — гомоморфізми. Таким чином, ми знайшли послідовність $(\varphi_m) \subset M(\mathcal{N}_m)$ таку, що $\widetilde{\varphi}_m(P) = \psi(P)$ при $m \geq n = \deg P$. Тому

$$\widetilde{\varphi}_m(P) \to \psi(P) \text{ при } m \to \infty \tag{3}$$

для довільного полінома P. □

Зауваження 1.2. *Питання, чи буде виконуватись (3) для довільної аналітичної функцій $f \in H_b(X)$ є відкритим, оскільки не відомо, чи залишок $||\psi(f) - \tilde{\varphi}_m(f)||$ буде прямувати до нуля в топології Гельфанта.*

Зауваження 1.3. $P(^2\mathcal{N}_1) \not\cong P(^2X)$. *Дійсно, довільний поліном другого степеня вигляду $\sum_{i\neq j} x_i x_j$ на множині $\mathcal{N}_1 \subset X$ буде дорівнювати нулю, тому не можливо встановити бієкцію між цими просторами.*

Цей висновок аналогічно можна узагальнити на випадок $\mathcal{N}_m$:

Зауваження 1.4. $P(^n\mathcal{N}_m) \not\cong P(^nX)$, $\mathcal{N}_m \subset X$, *якщо* $n > m$.

2 Опис множини характерів алгебри діагональних поліномів на ℓ_1

Нехай $X = \ell_1$. Розглянемо добуток лінійних функціоналів $f(x) = \sum_k a_k x_k$, $g(x) = \sum_k b_k x_k$, $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_1$ і обмежимо його на $\mathcal{N}_1(\ell_1)$. Оскільки $x \in \mathcal{N}_1(\ell_1)$, то $x = (0, \ldots, x_k, 0, \ldots)$ або $x = x_k e_k$ для деякого $k \geq 1$, тому лінійні функціонали f, g на $\mathcal{N}_1(\ell_1)$ матимуть вигляд:

$$f(x) = a_k x_k, g(x) = b_k x_k \text{ і їх добуток } h(x) = a_k x_k \cdot b_k x_k = c_k x_k^2.$$

Оскільки $(a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ (як коефіцієнти), то добуток k-тих координат $a_k \cdot b_k = c_k$, $k \geq 1$ визначить послідовність $(c_k)_{k=1}^{\infty}$, яка також буде належити до ℓ_∞.

Якщо $A_1(X)$ — алгебра, породжена поліномами степеня n, $n \leq 1$ і $A_1(\mathcal{N}_1)$ — відповідне обмеження алгебри $A_1(X)$ на підмножину $\mathcal{N}_1$, то множина функцій $H_b(\ell_1)|_{\mathcal{N}_1}$ наближається всеможливими алгебраїчними комбінаціями лінійних функціоналів з $A_1(\mathcal{N}_1)$:

$$A_1(\mathcal{N}_1) = H_b(\mathcal{N}_1), \qquad \mathcal{N}_1 \subset \ell_1.$$

Теорема 3. *Множиною характерів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація $\beta\mathbb{N}$ множини натуральних чисел. Довільний характер $\varphi \in \beta\mathbb{N}$ має вигляд:*

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \text{ де } P \in P(^1\mathcal{N}_1), \mathcal{U} - \text{ деякий фіксований ультрафільтр на } \mathbb{N}.$$

Доведення. Як було зауважено вище, $H_b(\mathcal{N}_1) = A_1(\mathcal{N}_1)$, тому кожен характер на $H_b(\mathcal{N}_1)$ визначається своїми значеннями на $P(^1\mathcal{N}_1)$. З іншого боку, кожен поліном $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$ має вигляд:

$$P(x) = P(x_k e_k) = a_k x_k, \text{ де } P(e_k) = a_k. \tag{4}$$

Перебираючи всеможливі $x \in \mathcal{N}_1$, кожному поліному $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$, можна поставити у відповідність послідовність елементів $\{a_k\} \subset \ell_\infty$.

Нехай φ – характер на $P(^1\mathcal{N}_1)$, тоді

$$(P \cdot Q)(e_k) = a_k \cdot b_k, \text{ де } P(e_k) = a_k, Q(e_k) = b_k,$$

і, таким чином,

$$\varphi(\{a_k\} \cdot \{b_k\}) = \varphi(\{a_k\})\varphi(\{b_k\}).$$

Це означає, що функціонал φ діє як мультиплікативний функціонал на ℓ_∞, а, отже, φ — характер на ℓ_∞. Множиною характерів на ℓ_∞, а, отже, і на $P(^1\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація множини $\mathbb{N}$, тобто $M(\ell_\infty) = \beta(\mathbb{N})$. Як відомо, $\beta(\mathbb{N})$ можна розглядати як множину всіх ультрафільтрів на $\mathbb{N}$.

Нехай $\varphi \in \beta(\mathbb{N})$, тоді існує ультрафільтр на $\mathbb{N}$, що $\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} a_k$, де $P \in P(^1\mathcal{N}_1)$, $a_k \in \ell_\infty$ і з (4) маємо:

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \qquad P \in P(^1\mathcal{N}_1).$$

Операція взяття границі є лінійною і мультиплікативною, тому φ — характер на $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Отже, множиною характреів на $H_b(\mathcal{N}_1)$ є стоун-чехівська компактифікація $\beta(\mathbb{N})$. $\square$

3 Випадок простору ℓ_2

Нехай $X = \ell_2$. Аналогічно $f(x) = a_k x_k$ і $g(x) = b_k x_k$ — обмеження лінійних функціоналів на $\mathcal{N}_1(\ell_2)$ такі, що ряди $\sum_k |a_k|^2$ і $\sum_k |b_k|^2$ збіжні. Не завжди, використовуючи всеможливі алгебраїчні комбінації, ми зможемо отримати поліноми степенів ≥ 2. Отже, не всі аналітичні функції з $H_b(\mathcal{N}_1)$ ми зможемо наблизити лінійними функціоналами $f(x)$ і $g(x)$ (як у випадку простору ℓ_1) і $A_1(\mathcal{N}_1) \neq H_b(\mathcal{N}_1)$.

Приклад 1. *Розглянемо поліном вигляду $h(x) = \sum_k x_k^2$ на $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$. Достатньо показати, що не існує функціоналів $f, g \in \ell_2^*$ таких, що їх добуток дорівнює x_k^2. Припустимо, що $f(x) = \sum a_k x_k, g(x) = \sum b_k x_k$. Тоді*

$$a_k x_k \cdot b_k x_k = x_k^2, \text{ отже } a_k \cdot b_k = 1.$$

Але ряди $(a_k^2)_{k=1}^\infty$ і $(b_k^2)_{k=1}^\infty$ неможуть бути одночасно для кожного абсолютно збіжними, тому функціоналів $f(x)$ і $g(x)$ не існує.

Розглядаючи алгебри $A_n(\mathcal{N}_1)$ на просторі ℓ_2, можна стверджувати, що

$$A_1(\mathcal{N}_1) \neq A_2(\mathcal{N}_1).$$

Наступне твердження є аналогом теореми 1 для $H_b(\mathcal{N}_1)$.

Твердження 3.1. *Нехай $I_1(\mathcal{N}_1)$ і $I_2(\mathcal{N}_1)$ — відповідні ідеали алгебр $A_1(\mathcal{N}_1)$ і $A_2(\mathcal{N}_1)$. Існує характер $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ такий, що $\varphi(I_1) = 0, \varphi(I_2) \neq 0$ і*

$$\varphi_{\mathcal{U}}(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k), \tag{5}$$

де $\mathcal{U}$ — деякий фіксований вільний ультрафільтр на множині натуральних чисел.

Доведення. Покажемо, що рівність (5) задовольняє умови даного твердження.

Якщо P — лінійний поліном, то

$$P(x) = \sum_k c_k x_k \text{ і } \varphi_{\mathcal{U}}(P) = \lim_{k\to\infty} c_k = 0$$

оскільки ряд $\sum_k |c_k|^2$ є збіжним. Отже,

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k) = 0.$$

Нехай $P(x) = \sum_k x_k^2 \in A_2(\mathcal{N}_1)$. Тоді,

$$\varphi(P) = \lim_{\mathcal{U}} P(e_k) = \lim_{\mathcal{U}} 1 = 1 \neq 0.$$

Функціонал, який визначається рівністю (5) дорівнює нулю на всіх однорідних поліномах першого степеня з $H_b(\mathcal{N}_1)$ і не дорівнює нулю на поліномах другого степеня. Дана рівність дійсно задовольняє умови твердження.

$\square$

Алгебра $A_3(\mathcal{N}_1) \neq A_2(\mathcal{N}_1), \mathcal{N}_1 \subset \ell_2$, оскільки поліноми вигляду

$$P(x) = \sum c_k x_k^3, \{c_k\} \in \ell_\infty, x \in \mathcal{N}_1(\ell_2) \tag{6}$$

не породжуються, в загальному випадку, алгебраїчними комбінаціями поліномів з $A_2(\mathcal{N}_1)$. Проте, між поліномами вигляду (6) та поліномами з $A_2(\mathcal{N}_1)$ існує алгебраїчна залежність:

$$P^2(x) - Q^3(x) = 0,$$

де $Q(x) = \sum \sqrt[3]{c_k^2} x_k^2 \in A_2(\mathcal{N}_1)$. Тому, якщо $\varphi \in M_b(\mathcal{N}_1)$ такий, що $\ker\varphi \supset I_2$, то $\ker\varphi \supset I_3$. Тобто, не існує характера, який розділяє ідеали I_2 та I_3. Для $m > 3$, легко бачити, що $A_m(\mathcal{N}_1) = A_3(\mathcal{N}_1)$. Таким чином, у випадку $\mathcal{N}_1 \subset \ell_2$, $M_b(\mathcal{N}_1) = M(A_3(\mathcal{N}_1))$.

Література

1. Aron R.M., Berner P.D. *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France., **106** (1978), 3–24.
2. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space,* J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51–93.
3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Weak-star continuous analytic functions,* Can. J. Math., **47** (1995), 673–683.
4. Davie A.M., Gamelin T.W. *A theorem on polynomial-star aproximation,* Proc. Amer. Math. Soc., **106** (1989), 351–356.
5. Zagorodnyuk A. *Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559–2569.
6. Zagorodnyuk A. *Spectra of Algebras of Analytic Functions and Polynomials on Banach Spaces,* Contemporary Math., **435** (2007), 381–194.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 09.10.2012

Taras O. *Block-diagonal algebras of analytic functions on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 340–346.

In this work we consider about algebras block diagonal of analytic functions on the space ℓ_1 and ℓ_2 and investigate spectra of these algebras.

Тарас О.Г. *Алгебры блочно-диагональных аналитических функций на банаховых пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 340–346.

В работе рассмотрено алгебры блочно-диагональных функций на пространстве ℓ_1 и ℓ_2 и исследовано спектры этих алгебр.