Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.21

Сливка-Тилищак Г.І.

РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ ОДНОРІДНОЇ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

Сливка-Тилищак Г.І. *Рівняння коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами з простору Орліча* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 316–327.

Знайдено умови існування з імовірністю двічі неперервно диференційовного розв'язку рівняння коливання однорідної струни з строго орлічевими початковими умовами у термінах кореляційних функцій. Знайдено оцінку для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Вступ

При розв'язувані задач математичної фізики часто потрібно враховувати вплив випадкових факторів, що можуть мати різну природу: Випадкові крайові та початкові умови, випадкові коефіцієнти, випадкова права частина та інші. У зв'язку з цим виникає необхідність в аналізі, що виражає ймовірнісну специфіку розглядуваної задачі. В залежності від типу задачі, специфіки випадкових факторів застосовують різні методи дослідження.

Вивченню задач математичної фізики гіперболічного типу з випадковими початковими умовами із простору $Sub_\varphi(\Omega)$ присвячені такі роботи: Булдигін В.В., Козаченко Ю.В. [1], Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.О. [6, 7], Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. [8, 4], з випадковими початковими умовами із простору Орліча — Барраса де Ла Крус Е., Козаченко Ю.В. [11]. Задачі математичної фізики з випадковою строго φ-субгауссовою правою частиною досліджувалися в роботах Довгая Б.В. [3, 4]. Рівняння параболічного типу з випадковими умовами з простору Орліча розглядалися в роботах Козаченка Ю.В. і Вереш К.Й. [12]. Посилання на інші роботи, які проводилися в цьому напрямку можна знайти в монографії [4].

У даній роботі розглядається крайова задача математичної фізики гіперболічного типу про коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами з простору

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.

Ключові слова і фрази: рівняння коливання однорідної струни, випадкові процеси з простору Орліча, кореляційні функції.

Орліча. Знайдено умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку у термінах кореляційних функцій. Для такої задачі отримано оцінку для розподілу супремуму розв'язку.

1 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 1.1 ([11])**.** *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається C-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.*

Означення 1.2 ([11])**.** *Будемо говорити, що C-функція и задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0 > 0$, $k > 0$, $A > 0$, що для всіх $x > z_0$, $y > z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \leq AU(kxy).$$

Означення 1.3 ([11])**.** *Нехай (T, ρ) – метричний простір і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $N_\rho(t, \varepsilon)$ найменшу можливу кількість точок ε-сітки множини T відносно псевдометрики ρ. Функцію $(N_\rho(t, \varepsilon), \varepsilon > 0)$ будемо називати масивністю множини T відносно псевдометрики ρ.*

Нехай $\{\Omega, \mathrm{Im}, P\}$ стандартний ймовірнісний простір.

Означення 1.4 ([11])**.** *Простором Орліча $L_u(\Omega)$ випадкових величин, породженим C-функцією $u(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_u(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = inf\left\{r > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 1.5 ([11])**.** *Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 1.6 ([11])**.** *Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча $(E\xi = 0)$, називається строго орлічевою, якщо існує стала C_Δ, що для скінченної кількості $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ і для будь-якого $\lambda_i \in \mathbf{R}^1$ виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_u} \leq C_\Delta\left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Означення 1.7 ([11])**.** *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, $(X \in L_U(\Omega))$ називається строго орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $X = \{X(t), t \in T\}$ - є строго орлічевою. Випадкові процеси $X = \{X(t), t \in T\}$ та $Y = \{Y(t), t \in T\}$ називаються сумісно строго орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ є строго орлічевою.*

Теорема 1 ([2]). *Нехай* $\xi(X)$, $E\xi(X)=0$, $X\in T$, $T=\{(x,y)\,|a_i\le x_i\le b_i, i=1,\dots,n\}$ *— неперервне з ймовірністю одиниця випадкове поле. Нехай* $B(X,Y)=E\xi(X)\xi(Y)$ *— кореляційна функція поля* $\xi(X)$. *Нехай існують частинні похідні* $B_{ii}(X,Y)=\frac{\partial^2 B(X,Y)}{\partial X_i \partial Y_i}$, $i=1,2$. $B_{ii}(X,Y)$ *— кореляційні функції похідних в середньому квадратичному* $\frac{\partial \xi(X)}{\partial x_i}$. *Якщо існує неперервна з ймовірністю одиниця модифікація поля* $\frac{\partial \xi(X)}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, *тоді, ця модифікація є звичайною частинною похідною випадкового поля* $\xi(X)$.

2 Рівняння коливання струни з випадковими початковими умовами з простору Орліча в термінах кореляційних функцій

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного гіперболічного рівняння [9]. Ставиться питання про існування функції $u=(u\,(x,y)\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ \ t\in[0,t])$, яка задовольняє наступним умовам:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; \tag{1}$$

$$x\in[0,\pi]\,,\ t\in[0,T]\,,\ T>0;$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\in[0,T]\,; \tag{2}$$

$$u(x,0)=\xi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\eta(x),\ x\in[0,\pi]\,. \tag{3}$$

Функції $p=(p(x),\ x\in[0,\pi])\,,\ q=(q(x),\ x\in[0,\pi])\,,\ \rho=(\rho(x),\ x\in[0,\pi])$ задовольняють умовам:

1. $p(x)>0,\rho(x)>0,\ q(x)\ge 0,\ x\in[0,\pi]\,;$
2. $p(x)$, і $\rho(x)$ – двічі неперервно диференційовні функції на $x\in[0,\pi]$;
3. $q(x)$ – неперервно диференційовна на $x\in[0,\pi]$.

Припустимо, що $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ і $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ є випадкові процеси із простору Орліча і такі, що майже напевно

$$\xi(0)=\xi(\pi)=\eta(0)=\eta(\pi)=0. \tag{4}$$

Позначимо кореляційні функції цих процесів через

$$B_\xi(x,y)=E\xi(x)\xi(y),\quad B_\eta(x,y)=E\eta(x)\eta(y),\ x,\ y\in[0,\pi]\,.$$

Із рівностей (4) випливає

$$B_\xi(0,y)=B_\xi(x,0)=B_\xi(\pi,y)=B_\xi(x,\pi)=0,$$

$$B_\eta(0,y)=B_\eta(x,0)=B_\eta(\pi,y)=B_\eta(x,\pi)=0.$$

Рівняння (1) описує коливання неоднорідної струни із закріпленими кінцями (2) і випадковими початковими умовами (3). При цьому випадковий процес $\xi(\bullet)$ описує початкове положення струни, а випадковий процес $\eta(\bullet)$ – початкову швидкість.

При використанні методу Фур'є [9] розв'язок задачі шукається у вигляді

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left[A_k cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}sin\sqrt{\lambda_k}t\right], \tag{5}$$

$$x\in\left[0,\pi\right],\ t\in\left[0,T\right],\ T>0;$$

де

$$A_k=\int_0^{\pi}\xi(x)X_k(x)\rho(x)dx,\quad B_k=\int_0^{\pi}\eta(x)X_k(x)\rho(x)dx,\ k\geq 1,$$

$\lambda_k,\ k\geq 1$ — власні значення, $X_k=(X_k)(x),\ x\in[0,\pi]),\ k\geq 1$ – відповідні їм власні функції наступної задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right)-q(x)x(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\quad x\in[0,\pi], \tag{6}$$

$$X(0)=X(\pi)=0. \tag{7}$$

Оскільки функції $p(x),\ \rho(x),\ q(x)$ задовольняють умовам 1 - 3, то всі власні значення $\lambda_k,\ k\geq 1$ додатні [9], занумеруємо їх так, що $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots\lambda_n<\ldots$. Власні функції $X_k,\ k\geq 1$ – двічі неперервно диференційовні на $[0,\pi]$.

Нехай $D=[0,\pi]\times[0,T]$, а $C(D)$ – простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним Банаховим простором.

Лема 2.1. *[9] Нехай $\lambda_k,\ k\geq 1$ і $X_k,\ k\geq 1$ – власні значення і відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля (4.6)–(4.7), де функції $p,\ q,\ \rho$ задовольняють умовам 1.–3. Тоді при $k\to\infty$ $\sqrt{\lambda_k}=k+O\left(\frac{1}{k}\right)$ і для всіх $x\in[0,\pi]$*

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin k\left(\int_0^x\left(\frac{\rho(u)}{p(u)}\right)^{\frac{1}{2}}du\right)+\frac{\beta_k}{k},\ \sup_{k\geq 1}\ \underset{x\in[0,\pi]}{sup}\left|\beta_k(x)\right|<\infty.$$

Наступні теореми є частковими випадками теореми 8 та теореми 9 роботи [10].

Теорема 2. *Нехай $\xi(x),\ \eta(x)$ — випадкові процеси із простору Орліча $L_U(\Omega)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області D існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3), що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо щоб виконувались умови:*

1) *існували неперервні з ймовірністю одиниця похідні $\frac{d^2\xi(x)}{dx^2},\ \frac{d\eta(x)}{dx},\ 0\leq x\leq\pi$;*

2) *для всіх $(x,t)\in D$ збігаються ряди:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}X_k\left(x\right)X_l\left(x\right)\Big[EA_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t+\tfrac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t$$
$$+\tfrac{2EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\ ],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}X_k(x)X_l(x)\Big[EA_kA_l\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t+\tfrac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t$$
$$-2\,\tfrac{EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\Big],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_k\lambda_lX_k(x)X_l(x)\Big[EA_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}t+\tfrac{EB_kB_l}{\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t$$
$$+2\,\tfrac{EA_kB_l}{\sqrt{\lambda_l}}\cos\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}t\Big];$$

3) для $n\geq 1,\ k=0,1,2$

$$\sup_{\substack{|x-y|\leq h\\|t-s|\leq h}}\left(E\left|S_n^{(k)}(x,t)-S_n^{(k)}(y,s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sigma_k(h),$$

де $\sigma_k(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції, такі що $\sigma_k(h)\to 0$ при $h\to 0$ і виконується умова

$$\int_{0+}^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty, \tag{8}$$

де $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ – обернені функції до $\sigma_k(\varepsilon)$.

Приклад 1. *Нехай $\xi(x)$ і $\eta(x)$ сумісно строго орлічеві процеси з простору $L_U(\Omega)$, де $U(x)=|x|^p,\ p>2$ тобто з простору $L_p(\Omega)$. Нехай в умові 8 $\sigma_k(h)=C_k|h|^\delta$, $0<\delta<1$. Тоді, для того щоб виконувалась умова 8 потрібно, щоб для досить малого $\varepsilon>0$ збігався інтеграл:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\left(\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\left(\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{1}{p}}du.$$

При достатньо малих $\varepsilon>0$ дана умова буде мати вигляд:

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\cdot\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\right)^{\frac{1}{p}}du\leq D\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{u^{\frac{2}{p\delta}}}\right)du.$$

де $D=\left(\frac{\pi TC_k^{\frac{2}{\delta}}}{4}\right)^{\frac{1}{p}}$. Останній інтеграл збігається коли $\delta>\frac{2}{p}$.

Теорема 3. *Нехай випадкові процеси $\xi(x)$ і $\eta(x)$, $x\in[0,\pi]$ є сумісно строго орлічеві процеси з простору $L_U(\Omega)$, де $U(x)=|x|^p$, при $p>2$. Нехай*

$$B_\xi(x,y)=E\xi(x)\xi(y),\quad B_\eta(x,y)=E\eta(x)\eta(y).$$

Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області D існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3), зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (5), достатньо, щоб виконувались умови:

1) *існують неперервні частинні похідні* $x, y \in [0, \pi]$

$$B_\xi^{**}(x,y) = \frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad B_\eta^{*}(x,y) = \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x \partial y},$$

для достатньо малого h *і* $\delta > \frac{2}{p}$ *виконуються нерівності*

$$\sup_{|x-y|\le h} \left(B_\xi^{**}(x,x) + B_\xi^{**}(y,y) - 2B_\xi^{**}(x,y)\right) \le C_{**} \left|h\right|^\delta,$$

$$\sup_{|x-y|\le h} \left(B_\eta^{*}(x,x) + B_\eta^{*}(y,y) - 2B_\eta^{*}(x,y)\right) \le C_{1*} \left|h\right|^\delta;$$

2) *збігається наступний ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} k^2 l^2 \left[|EA_k A_l| + \frac{|EB_k B_l|}{kl} + 2\frac{|EA_k B_l|}{l}\right] < \infty;$$

3) *для довільних* $\delta > \frac{2}{p}$ *виконуються наступна умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 \left(EA_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(EB_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{k}\right) k^\delta < \infty.$$

Накладемо деякі умови на кореляційні функції $B_\xi(x,y)$ і $B_\eta(x,y)$. Розглянемо задачу (1)–(3) при $p(x) = \rho(x) = 1$. Продовжимо функції $B_\xi(x,y)$, $B_\eta(x,y)$ на всю площину так, щоб вони були періодичними функціями з періодом 2π за x і y і щоб виконувались рівності

$$B_\xi(-x,y) = -B_\xi(x,y) = B_\xi(x,-y), \;\; B_\eta(-x,y) = -B_\eta(x,y) = B_\eta(x,-y).$$

Нехай

$$\Delta_{\tau_1\tau_2} f(x,y) = f(x+\tau_1, y+\tau_2) - f(x+, y+\tau_2) - f(x+\tau_1, y) + f(x,y),$$

$$\hat{B}_\xi = \frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3}, \quad \hat{B}_\eta = \frac{\partial^4 B_\eta(x,y)}{\partial x^2 \partial y^3},$$

Теорема 4. *Нехай випадкові процеси* $\xi(x)$ *і* $\eta(x)$, $x \in [0,\pi]$ *є незалежні строго орлічеві процеси з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x) = |x|^p$, *при* $p > 1$. *Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області* D *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1)–(3), *при наведених вище обмеженнях, зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду* (5), *достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *у продовжених на всю площину функцій* $B_\xi(x,y)$, $B_\eta(x,y)$ *існують обмежені похідні*

$$\frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \; i+j=6, \quad \frac{\partial^4 B_\eta(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \; i+j=4;$$

2) при достатньо малих τ_1 і τ_2, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ та деякому $\gamma > 0$ виконуються умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau_1\tau_2}\hat{B}_\xi(x,y)\right|dxdy \le c_1|\tau_1\tau_2|^\gamma,\ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau_1\tau_2}\hat{B}_\eta(x,y)\right|dxdy \le |c_2\tau_1\tau_2|^\gamma,$$

де $c_1,\ c_2 > 0$;

3) при достатньо малому $\tau > 0$ і деякому $\delta > \frac{2}{p}$ виконуються умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau\tau}\hat{B}_\xi(x,y)\right|dxdy \le c_3\tau^\delta,\ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_{\tau\tau}\hat{B}_\eta(x,y)\right|dxdy \le c_4\tau^\delta$$

де $c_3, c_4 > 0$.

Доведення. Умова 1) даної теореми забезпечує виконання умови 1) теореми 3. Покажемо, що із виконання умови 2) даної теореми випливає виконання умови 2) тієї ж теореми. Для цього достатньо показати, що

$$|EA_kA_l| \le \frac{c}{|kl|^{3+\gamma}}, \tag{9}$$

$$|EB_kB_l| \le \frac{c}{|kl|^{2+\gamma}}, \tag{10}$$

де c — деяка стала.

Оскільки, за означенням

$$EA_kA_l = \int_0^\pi\int_0^\pi B_\xi(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy,$$
$$EB_kB_l = \int_0^\pi\int_0^\pi B_\eta(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy,$$

і

$$X_k(x) = \frac{1}{\lambda_k}\left(X_k'' - q(x)X_k(x)\right),$$

то інтегруючи частинами і використовуючи, що

$$B_\xi(0,y) = B_\xi(\pi,y) = X_k(0) = X_k(\pi) = 0,$$

отримаємо

$$\int_0^\pi B_\xi(x,y)X_k''(x)dx = \int_0^\pi \frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2}X_k(x)dx.$$

Отже

$$EA_kA_l = \frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\left[\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2} - q(x)B_\xi(x,y)\right)X_l''(y)X_k(x)\right.$$
$$\left. - \int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2} - q(x)B_\xi(x,y)\right)q(y)X_l(x)X_k(y)dxdy\right].$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2} = E\xi'(x)\xi(y),\ \xi(0) = \xi(\pi) = 0,$$

тобто

$$\frac{\partial^2 B_\xi(x,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_\xi(x,\pi)}{\partial x^2} = 0,$$

тоді

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2} - q(x)B_\xi(x,y)\right) X_l''(y)dy \\ = \; &\int_0^\pi \left(\frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - q(x)\frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial y^2}\right) X_l(y)dy.\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}EA_kA_l \; = \; & \frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\left[\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} X_k(x)(x)X_l(y)dxdy \right. \\ + \; & \left. \int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y)X_k(x)X_l(y)dxdy\right],\end{aligned}$$

де

$$F(x,y) = B_\xi(x,y)q(x)q(y) - \frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial x^2}q(y) - \frac{\partial^2 B_\xi(x,y)}{\partial y^2}q(x).$$

За припущенням, функція $B_\xi(x,y)$ періодична з періодом 2π за x і y, то $F(x,y)$ – періодична з періодом 2π за x і y ітака, що виконується

$$F(-x,y) = -F(x,y) = F(x,-y).$$

Врахувавши властивості функції $F(x,y)$ і асимптотичні представлення $X_k(x)$ і λ_k із леми 2.1, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^\pi F(x,y)\sin lydy = -\frac{1}{2l}\int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\sin lydy,$$

$$\int_0^\pi F(x,y)\sin kxdx = -\frac{1}{2k}\int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}\sin kydx,$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y)\sin kx \sin lydxdy \\ = \; & \frac{1}{4k^2l^2}\int_\pi^{-\pi}\int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\sin kx \sin lydxdy.\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y)X_k(x)X_l(x)dxdy\right| \\ = \; & \left|\frac{1}{\lambda_k\lambda_l}\frac{1}{k^2l^2}\left[\int_\pi^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\sin kx \sin lydxdy\right.\right. \\ - \; & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}\sin kx\beta_l(y)dxdy \\ - \; & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\sin lx\beta_k(x)dxdy \\ + \; & \left.\left.\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y)\beta_l(y)\beta_k xdxdy\right|\right] \le \frac{c}{k^4l^4}.\end{aligned}$$

Аналогічно, використавши непарність функції $\frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ за x і за y , отримаємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 B_\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} X_k(x) X_l(y) dxdy \right| \\ \leq\ & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{kl} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3} \cos kx \cos ly dxdy \right| + \frac{d_1}{k^2 l^2} \end{aligned}$$

Отже

$$|EA_k A_l| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{k^3 l^3} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^6 B_\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3} \cos kx \cos ly dxdy \right| + \frac{d_2}{k^4 l^4}. \qquad (11)$$

Розглянемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy.$$

Оскільки, функція $\hat{B}_\xi(x,y)$ періодична з періодом 2π за x, і за y, то

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy \\ =\ & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y+\frac{\pi}{l}) \cos kx \cos ly dxdy. \end{aligned}$$

Крім того

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy \\ =\ & -\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y) \cos kx \cos ly dxdy. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи умову 2 даної теореми, отримаємо

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{B}_\xi(x,y) \cos kx \cos ly dxdy \right| \\ =\ & \left| \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y+\frac{\pi}{l}) - \hat{B}_\xi(x+\frac{\pi}{k}, y) \right. \\ -\ & \left. \hat{B}_\xi(x, y+\frac{\pi}{l}) + \hat{B}_\xi(x,y) \Big] \cos kx \cos ly dxdy \right| \\ \leq\ & \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta_{\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{l}} \hat{B}_\xi(x,y) \right| dxdy \leq \frac{c}{kl}. \end{aligned} \qquad (12)$$

З (11) і (12) отримаємо, що виконується (10).

Оскільки

$$EA_k^2 = E\left(\int_0^\pi \xi(x) X_k(x) dx \right)^2 = \int_0^\pi \int_0^\pi B_\xi(x,y) X_k(x) X_k(y) dxdy,$$

то легко довести, що із виконання умови 3) даної теореми випливає виконання умови 3) теореми 3. □

3 Оцінки для розподілу розв'язку задачі про коливання однорідної струни

Теорема 5. *[5] Нехай (T,ρ) метричний компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T,ρ), $X=\{X(t),\ t\in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується умова g. Нехай існує така функція $\sigma=\sigma(h),\ 0\le h\le \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна і така що $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h}\|X(t)-X(s)\|_U\le\sigma(h)$. Якщо для деякого ε виконується умова*

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty, \tag{13}$$

де

$$\chi_U(n)=\begin{cases} n, & n<U(z_0);\\ C_U U^{(-1)}(n), & n\ge U(z_0),\end{cases}$$

$C_U=k(1+U(z_0))\max(1,A)$, $z_0,\ k,\ A$ — константи з означення 1.2, $\sigma^{(-1)}(h)$ — функція обернена до $\sigma(h)$. Тоді з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup\limits_{t\in T}|X(t)|$ належить простору $L_U(\Omega)$ та

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U\le\|X(t_0)\|_U+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\omega_0\theta}\chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du=B(t_0,\ \theta),$$

де t_0 — довільна точка з T, $\omega_0=\sigma(\sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,\ t)),\quad 0<\theta<1$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\le\left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 6. *Нехай в умовах теореми 5 $T=\{0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T\}$, $\rho\left((x,\ t),\ (x_1,\ t_1)\right)=\max\left(|x-x_1|,|t-t_1|\right)$. Тоді умова 13 виконується, коли для деякого $\varepsilon>0$ виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)(u)}}+1\right)\right)du<\infty,$$

а

$$B(t_0,\ \theta)\le\widetilde{B}(t_0,\ \theta)=\|X(t_0)\|_U+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\omega_0\theta}\chi U\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)(u)}}+1\right)\right)du,$$

та для довільного $\varepsilon>0$

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\right\}\le\left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 5, оскільки в цьому випадку

$$N(u) \leq \left(\frac{\pi}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)(u)}} + 1\right).$$

□

Нехай

$$u_n\,(x,\ t) = \sum_{k=n}^{\infty} X_k(x)\left[A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right].$$

Нехай як і в теоремі 2 виконується умова

$$\sup_{\substack{|x-y|\leq h\\ |t-s|\leq h}} \left(E\left|S_n^{(0)}(x,t) - S_n^{(0)}(y,s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_0(h),$$

де $\sigma_0(h)$ – неперервні монотонно зростаючі функції, такі що $\sigma_0(h) \to 0$ при $h \to 0$ і виконується умова

$$\int_{0+}^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)du < \infty, \tag{14}$$

де $\sigma_0^{(-1)}(\varepsilon)$ — обернені функції до $\sigma_0(\varepsilon)$. Тоді має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in T}|u_n(x,\ t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1},$$

де

$$B(t_0,\ \theta) \leq \widetilde{B}(t_0,\ \theta) = \|u(x_0,t_0)\|_U +$$

$$+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\omega_0\theta} \chi_U\left(\left(\frac{\pi}{2\sigma_0^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_0^{(-1)(u)}} + 1\right)\right)du.$$

Література

1. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. *К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями* // Случайные процесы в задачах математической физики. — 1979. — С. 4–35.

2. Гладкая О.Н. *Условия дифференцируимости по направлению выборочных функций случайных полей* // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1977. — Вып. 17. — С. 33–40.

3. Довгай Б.В. *Обгрунтування методу Фур'єдля неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною* // Укр. мат. журнал. — 2004. — Т.56, №5. — С. 616–524.

4. Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І. Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. — 175 с.

5. Козаченко Ю.В., Вереш К.Й. *Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2009. — Вип. 80. — С. 56–69.

6. Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А. *Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из* $sub_{\varphi}(\Omega)$ *I* // Укр. мат. журнал. — 1998 . — Т.50, №4. — С. 504–515.

7. Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А. *Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из* $sub_{\varphi}(\Omega) II$ // Укр. мат. журнал. — 1998. — Т.50, №5. — С. 897–906.

8. Козаченко Ю. В., Сливка Г. І. *Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами* // Теорія ймов. та матем. статист. — 2003. — Вип. 69. — С. 48–63.

9. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. — 559 с.

10. Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й. *Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча* // Наук. вісник. Ужгородського ун-ту. Серія математика і інформатика. — 2008. — Вип. 16. — С. 174–183.

11. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V. *Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions,* Random Oper. And Stoch. Eq., **3**, 3 (1995), 201–220.

12. Kozachenko Yu.V., Veresh K.J. *Boundary-value problems for a nonhomogeneous parabolic equation with Orlicz right side*, Random Oper. and Stoch. Equ., **18** (2010), 97–119.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

Київ, Україна

e-mail: *aslyvka@tn.uz.ua*

Надійшло 01.03.2012

Slyvka-Tylyshchak A. *The equations of homogeneous string vibration with random Orlicz initial conditions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 316–327.

The conditions of existence with probability one of twice continuously differentiated solution formulating in terms of correlation functions of the boundary-value problems of homogeneous string vibration with random strongly Orlicz initial conditions are found. The estimation for distribution of supremum of this problem has been got too.

Сливка-Тилищак А.И. *Уравнение колебания однородной струны из случайными начальными условиями с пространства Орлича* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 316–327.

Найдены условия существования с вероятностью еденица дважды непрерывно диференцируемого решения уравнения колебания однородной струны с строго орличевыми начальными условиями в терминах корелляционных функций. Найдено оценку для распределения супремума решения такой задачи.