Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.6

Олійник А.П., Штаєр Л.О.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ РЕЛАКСАЦІЇ НА ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОЇ ВЕРХНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Олійник А.П., Штаєр Л.О. *Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 289–296.

Визначено значення параметрів релаксації, які визначають оптимальну швидкість збіжності блочного методу послідовної верхньої релаксації для розв'язку задачі Діріхле в двовимірній прямокутній області, доведено збіжність ітераційних процедур та додатню визначеність матриці відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вступ

При вирішенні задач фільтрації рідини з урахуванням різних типів граничних умов виникає задача чисельного розв'язку задачі Діріхле з використанням методу релаксації за рядками [1]. В роботах [4, 5] робиться спроба вибору оптимальних параметрів релаксації, для яких встановлено умову $0 < \omega < 2$. Проте, в процесі практичної реалізації задачі встановлено, що вказані межі зміни параметра релаксації є досить загальними, в окремих випадках $(\omega \to 0; \omega \to 2)$ ітераційний процес розв'язку задачі виявляється розбіжним, а встановлені в роботах [4, 5] значення $\omega_{opt} = 1,87$ призводять до розбіжності ітераційного процесу. Крім того, вказане в [4, 5] оптимальне значення ω_{opt}, яке є меншим з коренів рівняння $t^2\omega^2 - 16\omega + 16 = 0$, де $t = \cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q}$, а p та q — число відрізків, на які сітка розбиває кожну зі сторін прямокутника, в якому знаходиться розв'язок рівняння Лапласа при $p = q = 45$, як легко пересвідчитись прямим підрахунком, дорівнює $\omega_{opt} = 1,99$. В пропонованій роботі робиться спроба розробки методу оптимального вибору параметру релаксації для ітераційного методу розв'язання задачі Діріхле, досліджується залежність швидкості збіжності від типу граничних умов.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65N06, 11C20.
Ключові слова і фрази: задача Діріхле, ітераційний метод, параметр релаксації, визначник n-го порядку.

1 Постановка задачі

Задача оцінки швидкості фільтрації рідини в середовищі з опором вирішується шляхом чисельного розв'язання системи рівнянь фільтрації, яка в прямокутній області

$$G = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq H\} \tag{1}$$

записується у вигляді [3] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}; \\ v = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{k\rho g}{\mu}, \end{cases} \tag{2}$$

де u, v – компоненти вектора швидкості фільтрації, p – тиск рідини; μ — динамічна в'язкість рідини, k – проникність рідини, g — прискорення земного тяжіння, ρ — густина рідини. Система (2) доповнюється граничними умовами:

$$p\left|_{\partial G} = f(x, y)\right., \tag{3}$$

де $f(x, y) \in C(G)$ — у випадку задачі стаціонарної фільтрації, та

$$p\left|_{\partial G} = g(x, y)\right., \tag{4}$$

де $g(x, y)$ – кусково-неперервна функція — у випадку фільтрації рідини через прямокутну область за наявності її витоків через бокову поверхню.

Твердження 1.1. *Задача* (1)–(4) *зводиться до задачі Діріхле відносно функції* $p(x, y)$.

Доведення. Диференціюючи друге рівняння системи (2) по x, а третє — по y, одержуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням рівняння нерозривності (першого рівняння системи (2)), одержуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) з граничними умовами (3) або (4) складає задачу Діріхле, що і завершує доведення твердження. □

2 Розробка та дослідження чисельного методу розв'язання задачі Діріхле

Для чисельного розв'язку задачі Діріхле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in G,$$

$$u\left|_{\partial G} = f(x, y), f \in G(G),\right. \tag{6}$$

або

$$u\left|_{\partial G} = g(x, y),\right. \tag{7}$$

де $g(x, y)$ — кусково-неперервна функція, використовується метод релаксації, розрахункова схема якого записується у вигляді:

$$u_{i,j}^{K+1} = (1 - \omega)\, u_{i,j}^{K} + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)}\left[u_{i+1,j}^{K+1} + u_{i-1,j}^{K+1} + \beta^2\left(u_{i,j+1}^{K} + u_{i,j-1}^{K+1}\right)\right], \tag{8}$$

де ω — параметр релаксації, $0 < \omega < 2$ [1], $u_{i,j}^{K}$ — значення функції u в точці (x_i, y_j) на кроці ітераційної процедури за номером K. Рівняння (8) на кожному кроці ітераційної процедури містить три невідомі величини: $u_{i-1,j}^{K+1}$, $u_{i,j}^{K+1}$ та $u_{i+1,j}^{K+1}$. Величина $u_{i,j}^{K}$ є відомою з попереднього кроку ітераційної процедури, як і значення $u_{i,j+1}^{K}$. Величина $u_{i,j-1}^{K+1}$ є відомою з попереднього шару по координаті y. Таким чином, задаючи початкове наближення функції $u^0(x, y)$ з урахуванням граничних умов (6) або (7), що встановлюються за фізичною картиною процесу фільтрації з урахуванням особливостей фільтрації через бокову поверхню області G, одержується наступна система (для зручності запису не вказується верхній індекс — номер ітераційного процесу, а також індекс s — номер шару по y) алгебраїчних лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею:

$$\begin{cases} u_2 - Au_3 & = F_{2,s}; \\ -Au_2 + u_3 - Au_4 & = F_{3,s}; \\ \quad -Au_3 + u_4 - Au_5 & = F_{4,s}; \\ ------------- & \\ \qquad - Au_{I-2} + u_{I-1} & = F_{I-1,s}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$\begin{cases} F_{2,s} = (1 - \omega)\, u_{2,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1 + \beta^2)}\left[u_{2,s+1}^{K} + u_{2,s-1}^{K+1}\right] + Au\left|_{\partial G}(0; s)\right.; \\ F_{i,s} = (1 - \omega)\, u_{i,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1 + \beta^2)}\left[u_{i,s+1}^{K} + u_{i,s-1}^{K+1}\right], i = 3, I - 2; \\ F_{I-1,s} = (1 - \omega)\, u_{I-1,s}^{K} + \dfrac{\omega\beta^2}{2(1 + \beta^2)}\left[u_{I-1,s+1}^{K} + u_{I-1,s-1}^{K+1}\right] + Au\left|_{\partial G}(I; s)\right., \end{cases} \tag{10}$$

$A = \frac{\omega}{(1+\beta^2)2}$; $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, Δx — крок різницевої схеми по координаті x, Δy — крок ітераційної процедури по координаті y, I — кількість точок розбиття по x, s — номер шару по y. Величини (10) на кожному кроці ітераційної процедури є відомими. Схема розв'язання задачі є наступною:

— задається початкове наближення розв'язку $u^0\left(x,y\right)$;

— на кожному шарі по координаті y розв'язується система (9), в результаті чого за відомим $u^K\left(x,y\right)$ знаходиться наближення $u^{K+1}\left(x,y\right)$;

— якщо виконується умова:

$$\left|u^K\left(x_i,y_j\right)-u^{K+1}\left(x_i,y_j\right)\right|<\varepsilon,\forall\left(x_i,y_j\right),$$

де ε — заданий рівень точності, ітераційний процес припиняється.

Використовуючи пропоновану схему до системи (2), знаходимо розв'язок рівняння (5) з граничними умовами (3) або (4), після чого знаходиться поле швидкостей $\vec{V}\left(u,v\right)$ за відомим розподілом $p\left(x,y\right)$. Виникає питання дослідження збіжності ітераційного процесу, що базується на вирішенні задачі (9). Як відомо [2], якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь матриця $\tilde{A}$ – симетрична додатньо визначена матриця, то метод верхньої релаксації

$$\left(D+\omega A_1\right)\frac{x_{n+1}-x_n}{\omega}+\tilde{A}x_n=f,$$

де матриця системи A подається у вигляді:

$$\tilde{A}=D+A_1+A_2,$$

де A_1 — нижня трикутна матриця, A_2 — верхня трикутна матриця; D — діагональна матриця, є збіжним при умові $0<\omega<2$. Зокрема, метод Зейделя ($\omega=1$) збігається. Виникає питання в якій мірі вказаним умовам відповідає матриця системи (9).

Твердження 2.1. *Матриця системи* (9)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0\\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0\\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & | & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & | & 0 & 0 & 0\\ - & - & - & - & - & | & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -A & 1 & -A\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -A & 1 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

де

$$A=\frac{\omega}{2\left(1+\beta^2\right)},\beta=\frac{\Delta x}{\Delta y}, \qquad (12)$$

є симетричною додатньо визначеною матрицею.

Доведення. Симетричність матриці $\tilde{A}$ є очевидним фактом, оскільки $\forall i,j$ виконується умова:

$$\tilde{a_{ij}}=\tilde{a_{ji}}.$$

Необхідно перевірити додатню визначеність матриці, тобто, встановити, що будь-який головний мінор матриці $\tilde{A}$ є додатнім. З цією метою досліджується матриця (11) з умовами:

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta y\Rightarrow\beta=\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=1;\\ \qquad 0<\omega<2.\end{cases}$$

Розглянемо визначник матриці $\tilde{A}$:

$$\det \tilde{A} = \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & & \\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & & \\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & | & & 0 & \\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & & \\ - & - & - & - & - & | & - & - & - \\ & & & & & | & -A & 1 & -A \\ & & 0 & & & | & 0 & -A & 1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

Позначимо символом D_m головний мінор матриці $\tilde{A}$ порядку m. Тоді, очевидно, $\det \tilde{A} = D_n$, де n — порядок квадратної матриці $\tilde{A}$. Тоді:

$$\begin{aligned} D_n = & \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & & \\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & & \\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & | & & 0 & \\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & & \\ - & - & - & - & - & | & - & - & - \\ & & 0 & & & | & -A & 1 & -A \\ & & (n \times n) & & & | & 0 & -A & 1 \end{vmatrix} \\ = 1 \times & \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & & \\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & & \\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & | & & 0 & \\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & & \\ - & - & - & - & - & | & - & - & - \\ & & 0 & & & | & -A & 1 & -A \\ & & (n-1) \times (n-1) & & & | & 0 & -A & 1 \end{vmatrix} \\ + A & \begin{vmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & | & & & \\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & | & & & \\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & | & & 0 & \\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & | & & & \\ - & - & - & - & - & | & - & - & - \\ & & 0 & & & | & -A & 1 & -A \\ & & & & & | & 0 & -A & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $(n \times n)$ — порядок відповідної матриці.

Формула (14) є формулою розкладу визначника за першим рядком. Застосовуючи цю ж формулу для першого стовбця визначника, що є другим доданком в (14), одержуємо:

$$D_n = D_{n-1} + A\cdot(-A)\left|\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -A & 0 & 0 & 0 & & & \\ -A & 1 & -A & 0 & 0 & & & \\ 0 & -A & 1 & -A & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & -A & 1 & -A & & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & 0 & & & -A & 1 & -A \\ & & (n-2)\times(n-2) & & & 0 & -A & 1 \end{array}\right|$$

$$= D_{n-1} - A^2 D_{n-2}.$$

Отже,

$$D_n = D_{n-1} - A^2 D_{n-2}. \tag{15}$$

Формула (15) є формулою для обчислення будь-якого головного мінора порядку n. З (13) встановлюється, що $D_1 = 1$; $D_2 = 1 = A^2$, тому будь-яке значення D_n визначається за рекурентною формулою (15), для значень переметра n, яке дорівнює кількості точок розбиття по координаті у прямокутної області G (1). В рамках допущень (12) одержується, що для величини D_n справедлива наступна оцінка (як для монотонної функції аргумента A):

$$\begin{cases} \beta = 1; \\ 0 < \omega < 2, \end{cases} \Rightarrow \frac{n+1}{2^n} \le D_n \le 1,$$

тобто, D_n — завжди додатня величина, причому значення $\frac{n+1}{2^n}$ — це значення D_n при $\omega = 2$; 1 — значення D_n при $\omega = 0$.

Справедливість цього твердження очевидна при $\omega = 0$, $A = 0$, і матриця $\tilde{A}$ є одиничною, якщо ж $\omega = 2$, то легко встановлюється рекурентна формула

$$D_n = \frac{n+1}{2^n}. \tag{16}$$

Проводячи розрахунки для $\omega = 2$ за формулою (15), пересвідчимось, що при $n = 1$ та при $n = 2$ формула (16) є вірною. Очевидно, $D_1 = 1$; $D_2 = 1 - A^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, тобто, формула (16) є вірною. Перевіримо, що (16) справедлива при $m = n$, якщо допустимо за методом математичної індукції, що (16) вірна для $m = n-1$ та $m = n-2$. Оскільки:

$$D_n = D_{n-1} + A^2 D_{n-2} = \frac{(n-1)+1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^2}\frac{(n-2)+1}{2^{n-2}} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^n} = \frac{2n-n+1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n},$$

тобто, (16) — вірна за методом математичної індукції. Таким чином, $\tilde{A}$ – додатньо визначена симетрична матриця, тому вказаний ітераційний процес збігається. □

3 Аналіз одержаних результатів дослідження збіжності

Результати розрахунків D_n для $n \le 50$ подано в таблиці 1.

Таблиця 1. Залежність значень головних мінорів матриці ітераційного процесу D_j, $j = 1, ..., N$ при різних значеннях параметра релаксації

N	значення параметра релаксації, $\omega =$				
	0,2	0,6	1,05	1,4	1,8
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9950	0,9550	0,8622	0,7550	0,5950
5	0,9900	0,9115	0,7386	0,5550	0,3130
7	0,9851	0,8700	0,6327	0,4077	0,1618
9	0,9801	0,8304	0,5420	0,2995	0,0835
11	0,9752	0,7926	0,4643	0,2200	0,0430
13	0,9703	0,7565	0,3978	0,1616	0,0222
15	0,9655	0,7221	0,3407	0,1187	0,0114
17	0,9607	0,6892	0,2919	0,0872	0,0059
19	0,9558	0,6578	0,2500	0,0641	0,0030
21	0,9511	0,6279	0,2142	0,0471	0,0016
23	0,9463	0,5993	0,1835	0,0346	0,0008
25	0,9416	0,5720	0,1572	0,0254	0,0004
27	0,9368	0,5459	0,1347	0,0187	0,0002
29	0,9322	0,5211	0,1154	0,0137	0,0001
31	0,9275	0,4974	0,0988	0,0101	0,0001
33	0,9228	0,4747	0,0847	0,0074	0,0000
35	0,9182	0,4531	0,0725	0,0054	0,0000
37	0,9136	0,4325	0,0621	0,0040	0,0000
39	0,9091	0,4128	0,0532	0,0029	0,0000
41	0,9045	0,3940	0,0456	0,0022	0,0000
43	0,9000	0,3760	0,0391	0,0016	0,0000
45	0,8955	0,3589	0,0335	0,0012	0,0000
47	0,8910	0,3426	0,0287	0,0009	0,0000
49	0,8865	0,3270	0,0245	0,0006	0,0000

Аналізуючи одержані результати, можна зробити висновок про те, що при $\omega \to 2$ доведена теоретично збіжність ітераційного методу при практичній реалізації може не досягатись, оскільки в такому випадку визначник матриці A при великих значеннях n наближається до нуля, що обумовлює погану збіжність ітераційного процесу, а, з урахуванням похибок округлення – до розбіжності методу. З іншого боку, при $\omega \to 0$ метод збігається дуже повільно, саме через те, що з переходом від кроку ітераційної процедури за номером K до кроку $K+1$ розв'язок змінюється мало через те, що $\det \tilde{A} \approx 1$, а матриця $\tilde{A}$ близька до одиничної. Проте, можна зробити висновок – при виборі значення ω необхідно враховувати величину числа n – тобто, кількість точок розбиття по координаті x – при значеннях $n \leq 50$ задовільні результати при заданому рівні точності $\varepsilon = 10^{-4}$ одержуються при $0,8 < \omega < 1,25$. Залежність між кількістю ітерацій до збіжності та значенням ω подано в таблиці 2.

Таблиця 2. Залежність між кількістю ітерацій до збіжності та значенням параметра релаксації

Параметр релаксації	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Кількість ітерацій	9	8	7	7	6	6	5	5	5	5	6	19

Ще одним важливим висновком, який можна зробити за результатами дослідження збіжності ітераційного процесу, є залежність швидкості збіжності від типу граничних умов – так, в тих випадках, коли граничні умови вибираються у формі (3), швидкість збіжності в 2 рази більша, ніж у випадку розривних граничних умов (4).

Напрямки подальших досліджень визначаються необхідністю узагальнення вказаної методики на розв'язок задачі Пуасона – коли права частина (5) не дорівнює нулю, вивчення поведінки чисельного розв'язку задачі (5) з умовами (3) і (4) при реальних фізичних значеннях величин, що входять в математичні моделі (2)–(4) при більш складних, ніж (1) просторових конфігураціях областей.

Література

1. Андерсон Д., Таненхил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1. — М.: Мир, 1990. — 384 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
4. Frankel S.P. *Convergence Rates of Iterative Treatments of Partical Pifferential Equations*, Mathem. Tables and Other Aids to Computation, **4** (1950), 65–75.
5. Young D. *Iterative Methods for Solving Partial Difference equations of Elliptic Type*, Trans. Amer. Math. Soc., **76** (1954), 92–111.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,

Івано-Франківськ, Україна

e-mail: *andrij-olijnyk@rambler.ru*

Надійшло 26.04.2012

Oliynyk A.P., Shtayer L.O. *The Dirichlet problem successive upper relaxation numerical method convergence relaxation parameters influence investigations*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 289–296.

The relaxation parameters values to definite sequential upper relaxation block method convergence optimal velocity have been determined for the Dirichlet's problem in two-dimensional rectangle spatial region, the iteration procedure convergence and positive definiteness of the corresponding linear algebraic equations system matrix have been proved.

Олийнык А.П., Штаер Л.Е. *Исследование влияния параметров релаксации на сходимость численного метода последовательной верхней релаксации для задачи Дирихле* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 289–296.

Определены значения параметров релаксации, которые определяют оптимальную скорость сходимости блочного метода последовательной верхней релаксации для решения задачи Дирихле в двухмерной прямоугольной области, доказана сходимость итерационных процедур и положительная определённость матрицы соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.