Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 517.956

Самусенко П.Ф.

ДО ПИТАННЯ ПРО КАНОНІЧНІ ФОРМИ РЕГУЛЯРНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

Самусенко П.Ф. *До питання про канонічні форми регулярної в'язки матриць* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 116–124.

У роботі розроблено алгоритм локального зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду.

Вступ

Різноманітні задачі теоретичної механіки, алгебри, теорії наближень, теорії диференціальних рівнянь приводять до розгляду певних канонічних форм матриць та їх в'язок. При цьому структура канонічної форми повинна дозволяти провести класифікацію випадків задачі, що розглядається, та ефективно знайти її розв'язок.

Зокрема, в теорії диференціальних рівнянь суттєво використовується жорданова форма матриці, що пов'язано зі структурою фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У випадку, коли елементи матриці коефіцієнтів системи є довільними достатньо гладкими функціями, то доволі часто локальні властивості її розв'язків подібні до властивостей розв'язків певної системи зі сталими коефіцієнтами. Так, у працях [4, 5, 6] наведено алгоритми побудови формальних розв'язків систем диференціальних рівнянь з особливими точками, сингулярно збурених систем та систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з особливими точками, що грунтуються на структурі жорданої форми граничної матриці відповідної задачі. При цьому в окремих точках структура матриці коефіцієнтів зазначених систем може змінюватись (наприклад, тип елементарних дільників). Такий підхід дозволяє з'ясувати асимптотичні властивості розв'язків систем зі змінними коефіцієнтами, спираючись на аналогічні властивості систем з граничними (сталими) матрицями.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E10.
Ключові слова і фрази: регулярна в'язка матриць, канонічна форма.

1 Випадок локального зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду

У даній праці, використовуючи ідеї Y. Sibuya, наведено теореми про зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду [1]. При цьому є істотною лише структура відповідної граничної в'язки. Зазначимо, що одержані результати дозволяють ефективно досліджувати асимптотичні властивості сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями.

Теорема 1. *Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^m[0;T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1 + ... + p_r + q_1 + ... + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t)$, $Q(t) \in C^m[0;t_0]$, $t_0 \leq T$, що*

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t) \equiv diag\{E_q(t), W_p(t)\}, \tag{1}$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t) \equiv diag\{J_q(t), E_p(t)\}, \tag{2}$$

де

$$W_p(t) = diag\{W_1(t), ..., W_r(t)\},\ E_p(t) = diag\{E_1(t), ..., E_r(t)\},$$

$$E_q(0) = E_q,\ E_i(0) = E_i,\ i = \overline{1,r};\ J_q(0) = J_q \equiv diag\{J_1, ..., J_s\};$$

$$W_i(0) = W_i,\ i = \overline{1,r},$$

$$W_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},\ i = \overline{1,r},\ J_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ j = \overline{1,s},$$

λ_i, $i = \overline{1,r}$, — власні значення в'язки $A(0) - \lambda B(0)$, E_i — одинична матриця відповідного порядку, $p = p_1 + ... + p_r$, $q = q_1 + ... + q_s$.

Доведення. Нехай

$$A(t) = A(0) + D(t),\ B(t) = B(0) + F(t),\ \widetilde{A}(t) = \widetilde{A}(0) + U(t),\ \widetilde{B}(t) = \widetilde{B}(0) + V(t). \tag{3}$$

Тоді $D(0) = F(0) = U(0) = V(0) = 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(0) = \widetilde{A}(0)$, $B(0) = \widetilde{B}(0)$. Матриці $P(t)$, $Q(t)$ визначаємо із системи рівнянь

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t),\ P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t). \tag{4}$$

Покладемо

$$P(t) = E + R(t),\ Q(t) = E + S(t), \tag{5}$$

де E — одинична матриця n-го порядку. За побудовою $R(0) = S(0) = 0$.

Підставляючи (3), (5) до системи (4), дістаємо

$$\widetilde{A}(0)S(t)+R(t)\widetilde{A}(0)+D(t)+D(t)S(t)+R(t)\widetilde{A}(0)S(t)+R(t)D(t)+R(t)D(t)S(t)-U(t)=0, \tag{6}$$

$$\widetilde{B}(0)S(t)+R(t)\widetilde{B}(0)+F(t)+F(t)S(t)+R(t)\widetilde{B}(0)S(t)+R(t)F(t)+R(t)F(t)S(t)-V(t)=0. \tag{7}$$

Нехай

$$U(t)=diag\{U_q(t),U_p(t)\},\ U_p(t)=diag\{U_2(t),...,U_{r+1}(t)\},$$

$$V(t)=diag\{V_q(t),V_p(t)\},\ V_p(t)=diag\{V_2(t),...,V_{r+1}(t)\},$$

$$D(t)=\begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & \dots & D_{1,r+1}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & \dots & D_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{r+1,1}(t) & D_{r+1,2}(t) & \dots & D_{r+1,r+1}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & \dots & F_{1,r+1}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & \dots & F_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{r+1,1}(t) & F_{r+1,2}(t) & \dots & F_{r+1,r+1}(t) \end{pmatrix},$$

де $U_1(t)=U_q(t)$, $V_1(t)=V_q(t)$ та $U_i(t)$, $V_i(t)$, $i=\overline{2,r+1}$, — квадратні матриці відповідно q-го та p_i-го порядку; $D_{1j}(t)$, $F_{1j}(t)$ $j=\overline{2,r+1}$, та $D_{i1}(t)$, $F_{i1}(t)$, $i=\overline{2,r+1}$, — прямокутні матриці розмірів $q\times p_j$ та $p_i\times q$; $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$, $i,j=\overline{2,r+1}$, — прямокутні матриці розмірів $p_i\times p_j$. Покладемо

$$S(t)=\begin{pmatrix} 0 & S_{12}(t) & \dots & S_{1,r+1}(t) \\ S_{21}(t) & 0 & \dots & S_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{r+1,1}(t) & S_{r+1,2}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}, R(t)=\begin{pmatrix} 0 & R_{12}(t) & \dots & R_{1,r+1}(t) \\ R_{21}(t) & 0 & \dots & R_{2,r+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{r+1,1}(t) & R_{r+1,2}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,r+1}$, — прямокутні матриці таких же розмірів, що й $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$. Тоді із системи (6), (7) дістаємо

$$\begin{aligned} U_i(t)=D_{ii}(t)+&\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} D_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)\widetilde{A}_{jj}(0)S_{ji}(t) \\ &+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)D_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1} D_{jk}(t)S_{ki}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_i(t)=F_{ii}(t)+&\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} F_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)\widetilde{B}_{jj}(0)S_{ji}(t) \\ &+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)F_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1} R_{ij}(t)\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1} F_{jk}(t)S_{ki}(t), \end{aligned}$$

$i=\overline{1,r+1}$, та

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)\widetilde{A}_{jj}(0)+D_{ij}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{r+1}D_{ik}(t)S_{kj}(t)\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{r+1}R_{ik}(t)\widetilde{A}_{kk}(0)S_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)D_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)\sum_{l=1,\ l\neq j}^{r+1}D_{kl}(t)S_{lj}(t)=0,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{B}_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)\widetilde{B}_{jj}(0)+F_{ij}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{r+1}F_{ik}(t)S_{kj}(t)\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{r+1}R_{ik}(t)\widetilde{B}_{kk}(0)S_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)F_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)\sum_{l=1,\ l\neq j}^{r+1}F_{kl}(t)S_{lj}(t)=0,\end{aligned}\tag{9}$$

$i\neq j,\ i,j=\overline{1,r+1}$.

Згідно [3], якобіан системи (8), (9) в точці $t=0$ відмінний від нуля. А тому існує таке t_0, $t_0\leq T$, що система (8), (9) відносно $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,r+1}$, сумісна для всіх $t\in[0;t_0]$. При цьому $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)\in C^m[0;t_0]$. Теорему доведено. □

Припустимо, що елементи матриць $A(t)$ та $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ допускають асимптотичні розвинення за степенями t, тобто

$$A(t)=\sum_{s\geq 0}A^{(s)}t^s,\ B(t)=\sum_{s\geq 0}B^{(s)}t^s.\tag{10}$$

Тоді такою ж властивістю володіють елементи матриць $P(t)$ та $Q(t)$. Справді, шукатимемо $P(t)$ та $Q(t)$ у вигляді

$$P(t)=\sum_{s\geq 0}P^{(s)}t^s,\ Q(t)=\sum_{s\geq 0}Q^{(s)}t^s,\tag{11}$$

з невизначеними поки що коефіцієнтами $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$, $s\geq 0$.

За побудовою

$$A(0)=A^{(0)},\ D(t)=\sum_{s\geq 1}A^{(s)}t^s,\ B(0)=B^{(0)},\ F(t)=\sum_{s\geq 1}B^{(s)}t^s.$$

Нехай

$$P^{(0)}=E,\ R(t)=\sum_{s\geq 1}P^{(s)}t^s,\ Q^{(0)}=E,\ S(t)=\sum_{s\geq 1}Q^{(s)}t^s,$$

$$U(t)=\sum_{s\geq 1}U^{(s)}t^s,\ V(t)=\sum_{s\geq 1}V^{(s)}t^s.$$

Тоді, зрівнюючи в системі (6), (7) коефіцієнти при однакових степенях t, дістаємо

$$A^{(0)}Q^{(s)}+P^{(s)}A^{(0)}+A^{(s)}+\sum_{n=1}^{s-1}A^{(n)}Q^{(s-n)}+\sum_{n=1}^{s-1}P^{(n)}A^{(0)}Q^{(s-n)}$$

$$+\sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)}A^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)}A^{(l)}Q^{(s-n-l)} - U^{(s)} = 0$$

та

$$B^{(0)}Q^{(s)} + P^{(s)}B^{(0)} + B^{(s)} + \sum_{n=1}^{s-1} B^{(n)}Q^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)}B^{(0)}Q^{(s-n)}$$

$$+\sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)}B^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)}B^{(l)}Q^{(s-n-l)} - V^{(s)} = 0,$$

$s \in N$.

Вважаючи, що структура матриць $D(t)$, $F(t)$, $R(t)$ та $S(t)$ така ж, як і в теоремі 1, аналогічно отримаємо

$$U_i^{(s)} = A_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} A_{ij}^{(s)}Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)}A_{jj}^{(0)}Q_{ji}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)}A_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)}A_{jk}^{(l)}Q_{ki}^{(s-n-l)},$$

$$V_i^{(s)} = B_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} B_{ij}^{(s)}Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)}B_{jj}^{(0)}Q_{ji}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)}B_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)}B_{jk}^{(l)}Q_{ki}^{(s-n-l)},$$

$i = \overline{1, r+1}$, $s \in N$, та

$$A_{ii}^{(0)}Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)}A_{jj}^{(0)} + A_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} A_{ik}^{(n)}Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\, k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)}A_{kk}^{(0)}Q_{kj}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)}A_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)}A_{km}^{(l)}Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0, \tag{12}$$

$$B_{ii}^{(0)}Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)}B_{jj}^{(0)} + B_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} B_{ik}^{(n)}Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,\, k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)}B_{kk}^{(0)}Q_{kj}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)}B_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)}B_{km}^{(l)}Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0, \tag{13}$$

$i \neq j$, $i, j = \overline{1, r+1}$, $s \in N$.

Система (12), (13) відносно $Q_{ij}^{(s)}$, $P_{ij}^{(s)}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, r+1}$, $s \in N$, сумісна для всіх $t \in [0; T]$ [3].

Покладемо

$$P_m(t) = \sum_{s=0}^{m} P^{(s)} t^s, \; Q_m(t) = \sum_{s=0}^{m} Q^{(s)} t^s.$$

За побудовою матриці $P_m(t)$, $Q_m(t)$ задовольняють систему (6), (7) з точністю $O(t^{m+1})$. Тоді з такою ж точністю задовольняють зазначену систему і матриці $P(t) - P_m(t)$, $Q(t) - Q_m(t)$.

Нехай $\widetilde{P}(t) = P(t) - P_m(t)$, $\widetilde{Q}(t) = Q(t) - Q_m(t)$. Тоді

$$A^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)A^{(0)} + D(t)\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)A^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)D(t)$$
$$+\widetilde{P}(t)D(t)\widetilde{Q}(t) + U(t) - U_m(t) + O(t^{m+1}) = 0, \tag{14}$$
$$B^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)B^{(0)} + F(t)\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)B^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)F(t)$$
$$+\widetilde{P}(t)F(t)\widetilde{Q}(t) + V(t) - V_m(t) + O(t^{m+1}) = 0, \tag{15}$$

де $U_m(t)$ та $V_m(t)$ — діагональні матриці вигляду

$$U_m(t) = \sum_{s=0}^{m} U^{(s)} t^s, \quad V_m(t) = \sum_{s=0}^{m} V^{(s)} t^s.$$

Оскільки система (14), (15) структурно ідентична системі (6), (7), то існує таке t_0, $t_0 \leq T$, що система (14), (15) відносно $\widetilde{P}(t)$, $\widetilde{Q}(t)$ сумісна для всіх $t \in [0; t_0]$. При цьому $\widetilde{P}(t) = O(t^{m+1})$ та $\widetilde{Q}(t) = O(t^{m+1})$.

Отже, на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, мають місце асимптотичні розвинення (11) [2].

Наслідок 1.1. *Нехай елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ допускають асимптотичні розвинення (10), в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1 + ... + p_r + q_1 + ... + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$, для яких мають місце рівності (1), (2). При цьому елементи $P(t)$, $Q(t)$ на відрізку $[0; t_0]$ допускають асимптотичні розвинення (11).*

Якщо деякі власні значення в'язки $A(0) - \lambda B(0)$ однакові, то аналогічно доводяться такі твердження.

Теорема 2. *Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^m[0; T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1 + ... + p_r + q_1 + ... + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t)$, $Q(t) \in C^m[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, що*

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t) \equiv diag\{E_q(t), W_p(t)\}, \tag{16}$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t) \equiv diag\{J_q(t), E_p(t)\}, \tag{17}$$

де $E_q(0) = E_q$, $E_p(0) = E_p$; $J_q(0) = J_q \equiv diag\{J_1, ..., J_s\}$; $W_p(0) = W_p \equiv diag\{W_1, ..., W_r\}$, $p = p_1 + ... + p_r$, $q = q_1 + ... + q_s$.

Наслідок 1.2. *Нехай елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ допускають асимптотичні розвинення (10), в'язка $A(0)-\lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$, $t\in[0;t_0]$, $t_0\le T$, для яких мають місце рівності (16), (17). При цьому елементи $P(t)$, $Q(t)$ на відрізку $[0;t_0]$ допускають асимптотичні розвинення (11).*

Наведені вище теореми можна узагальнити для випадку регулярної в'язки матриць $A(t,\varepsilon)-\lambda B(t,\varepsilon)$, елементи яких визначені на множині

$$\overline{K}=\{(t,\varepsilon):0\le t\le T,\,0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}.$$

Теорема 3. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(0,0)-\lambda B(0,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_1)$ ($(0,0)\in\overline{K}_1\subset\overline{K}$), що*

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon)\equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),W_p(t,\varepsilon)\},\tag{18}$$

$$W_p(t,\varepsilon)=diag\{W_1(t,\varepsilon),...,W_r(t,\varepsilon)\},$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),E_p(t,\varepsilon)\},\tag{19}$$

$$E_p(t,\varepsilon)=diag\{E_1(t,\varepsilon),...,E_r(t,\varepsilon)\},$$

де $E_q(0,0)=E_q$, $E_i(0,0)=E_i$, $i=\overline{1,r}$; $J_q(0,0)=J_q\equiv diag\{J_1,...,J_s\}$; $W_i(0,0)=W_i$, $i=\overline{1,r}$, $p=p_1+...+p_r$, $q=q_1+...+q_s$.

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 1. Отже, нехай $A(t,\varepsilon)=A(0,0)+D(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)=B(0,0)+F(t,\varepsilon)$, $\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(0,0)+U(t,\varepsilon)$, $\widetilde{B}(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(0,0)+V(t,\varepsilon)$. Тоді $D(0,0)=F(0,0)=U(0,0)=V(0,0)=0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(0,0)=\widetilde{A}(0,0)$, $B(0,0)=\widetilde{B}(0,0)$.

Як і раніше, матриці $R(t,\varepsilon)$, $S(t,\varepsilon)$ визначаються із системи рівнянь

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon),\ P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon).\tag{20}$$

Покладаючи $P(t,\varepsilon)=E+R(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)=E+S(t,\varepsilon)$, і вважаючи, що матриці $R(t,\varepsilon)$ та $S(t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й в теоремі 1, аналогічно показуємо сумісність системи (20) на множині $\overline{K}_1$. Теорему доведено. □

Теорема 4. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(0,0)-\lambda B(0,0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_1)$ ($(0,0)\in\overline{K}_1\subset\overline{K}$), що*

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon)\equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),W_p(t,\varepsilon)\},\tag{21}$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),E_p(t,\varepsilon)\},\tag{22}$$

де $E_q(0,0)=E_q$, $E_p(0,0)=E_p$; $J_q(0,0)=J_q\equiv diag\{J_1,...,J_s\}$; $W_p(0,0)=W_p\equiv diag\{W_1,...,W_r\}$, $p=p_1+...+p_r$, $q=q_1+...+q_s$.

2 Нелокальний випадок

Нехай тепер кронекерова структура в'язки $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ залишається незмінною на відрізку $[0;T]$ [1]. Тоді вірне таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, на відрізку $[0;T]$ в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$,*

$$\overline{K}_2=\{(t,\varepsilon): 0\le t\le T,\, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1\},\ \varepsilon_1\le\varepsilon_0,$$

для яких мають місце рівності (18), (19).

Доведення. Покладемо

$$A(t,\varepsilon)=A(t,0)+D(t,\varepsilon),\ B(t,\varepsilon)=B(t,0)+F(t,\varepsilon),$$

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,0)+U(t,\varepsilon),\ \widetilde{B}(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,0)+V(t,\varepsilon).$$

Тоді $D(t,0)=F(t,0)=U(t,0)=V(t,0)=0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(t,0)=\widetilde{A}(t,0)$, $B(t,0)=\widetilde{B}(t,0)$. Покладаючи $P(t,\varepsilon)=E+R(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)=E+S(t,\varepsilon)$, і вважаючи, що матриці $R(t,\varepsilon)$ та $S(t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й в теоремі 1, аналогічно показуємо сумісність системи (20) на множині $\overline{K}_2$. Наслідок доведено. □

Наслідок 2.2. *Нехай на множині $\overline{K}$ елементи $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення*

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}A_s(t)\varepsilon^s,\ B(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}B_s(t)\varepsilon^s,$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m-го порядку включно, в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon)\in\overline{K}_2$, для яких справджуються рівності (18), (19). При цьому елементи $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ на множині $\overline{K}_2$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$P(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}P_s(t)\varepsilon^s,\ Q(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}Q_s(t)\varepsilon^s,$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m-го порядку включно.

Наслідок 2.3. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, на відрізку $[0;T]$ в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$ для яких мають місце рівності (21), (22).*

Література

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. — М.: Наука, 1969. — 608 с.
4. Iwano M. *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I*, Funkcialaj Ekvacioj, **5**, (1963), 71–134.
5. Iwano M. *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II*, Funkcialaj Ekvacioj, **6**, (1964), 89–141.
6. Sibuya Y. *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*, Funkcialaj Ekvacioj, **4**, (1962), 29–56.

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,

Київ, Україна

e-mail: *psamusenko@ukr.net*

Надійшло 16.12.2011

Samusenko P.F. *About canonical forms of regular matrix pencil*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 116–124.

The algorithm of local reduction of the regular matrix pencil to canonical form is constructed in the article.

Самусенко П.Ф. *К вопросу о канонических формах регулярного пучка матриц* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 116–124.

В работе разработан алгоритм локального приведения регулярного пучка матриц к каноническому виду.