Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 515.12+512.58

Копорх К.М.

ПРОСТІР ВІДКРИТИХ ФАКТОРВІДОБРАЖЕНЬ ЗБІЖНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Копорх К.М. *Простір відкритих факторвідображень збіжної послідовності* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 58–66.

Наведено деякі властивості топології простору фактороб'єктів збіжної послідовності. Зокрема, показано, що цей простір розкладається в об'єднання двох множин, одна з яких всюди щільна, а інша — гомеоморфна простору ірраціональних чисел.

Вступ

Топологія гіперпросторів (просторів замкнених підмножин) нульвимірних метричних компактних просторів є добре вивчена (див., наприклад, [1]). Автор в [3], [4] розглянув дуальний до гіперпростору об'єкт — простір $\Psi(X)$ відкритих факторвідображень компактного простору X. Виникає природна задача опису топологічних властивостей простору $\Psi(X)$ для різних просторів X. Метою цієї замітки є розгляд випадку, коли $X = S$ (збіжна послідовність). Зауважимо, що гіперпростір $\exp S$ розглянуто в роботі [7]. У ній доведено, що простір $\exp S$ є об'єднанням канторової множини та всюди щільної зліченної множини ізольованих точок.

Ми показуємо, що $\Psi(S)$ є досконалим нульвимірним некомпактним метризовним простором, який розкладається в об'єднання двох множин, одна з яких всюди щільна, а інша — досконала.

Надалі вважаємо, що всі відображення топологічних просторів є неперервними.

1 Основні поняття та означення

Нехай X — компактний гаусдорфовий простір (компакт), $f\colon X \to Z$ — неперервне, відкрите, сюр'єктивне відображення компактних гаусдорфових просторів. Як звичайно, $\exp X$ ми позначаємо гіперпростір (множину непорожніх, замкнених підмножин

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: гіперпростір, факторвідображення, топологія Вієторіса.

простору X), наділений топологією Вієторіса. Базою цієї топології може служити сім'я множин

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$ і множини $U_1, U_2, \ldots U_n$ пробігають топологію простору X.

У випадку, коли X — метризовний компакт, топологія Вієторіса породжується метрикою Гаусдорфа

$$d_H(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid E \subseteq O_\varepsilon(F) \text{ і } F \subseteq O_\varepsilon(E)\}.$$

Доведення цього факту можна знайти у підручнику [6]. Має місце наступний результат (див. [6, с. 131, 189]):

Теорема 1. *Простір компактних підмножин повного метричного простору з метрикою гаусдорфа повний.*

Теорема 2. *Якщо X — нульвимірний компакт, то $(\exp X, \tau_V)$ — нульвимірний компакт.*

Послідовність $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ елементів простору $\exp X$ збігається до елемента $A \in \exp X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такий, що всі елементи послідовності починаючи з номера N_0 містяться в ε-околі елемента A. Має місце наступний результат ([6, с.95]):

Теорема 3. *Нехай X — регулярний простір, $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$ і $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$ такі, що $K_n \subset F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо послідовність $K_n \longrightarrow K$ і $F_n \longrightarrow F$ в топології Вієторіса, то $K \subset F$.*

Відомо, що відкритість відображення $f\colon X \to Z$ еквівалентна неперервності відображення $f^{-1}\colon Z \to \exp X$. Образом простору Z при відображенні $F = f^{-1}\colon Z \to \exp X$ є непорожня, замкнена підмножина $F(Z)$ в $\exp X$, тобто елемент простору $\exp(\exp X) = \exp^2 X$. Маємо

$$F(Z) = \{f^{-1}(z) \mid z \in Z\} = \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}.$$

Нехай $f_i\colon X \to Z_i, i = 1, 2,$ — неперервні сюр'єктивні відкриті відображення компактних гаусдорфових просторів. Кажемо, що f_1 еквівалентне f_2 (позначається $f_1 \sim f_2$), якщо існує гомеоморфізм $h\colon Z_1 \to Z_2$ такий, що $h \circ f_1 = f_2$. Очевидно, що $\sim$ — відношення еквівалентності на класі всіх неперервних сюр'єктивних відкритих відображень. Клас відношення $\sim$, що містить відображення f, позначаємо $\langle f\rangle$ і назвемо фактороб'єктом простору X.

Базисним околом елемента $\langle f\rangle$, в топології Вієторіса, є множина

$$O\langle f\rangle = \langle\langle U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n_1}\rangle, \langle U_{21}, U_{22}, \ldots, U_{2n_2}\rangle, \ldots, \langle U_{k1}, U_{k2}, \ldots, U_{kn_k}\rangle\rangle,$$

де U_{ij} — відкриті підмножини простору X такі, що виконуються умови:

1) для кожного $z \in Z$ існує i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i}\rangle$, тобто $f^{-1}(z) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_i} U_{ij}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ldots n_i\}$ маємо $f^{-1}(z) \cap U_{ij} \neq \varnothing$;

2) для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ знайдеться елемент $z \in Z$ такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i}\rangle$.

Одержаний топологічний простір відкритих фактороб'єктів простору X позначаємо $\Psi(X)$. Задамо збіжність у просторі $\Psi(X)$. Нехай задано послідовність відображень $f_i\colon X \to Z_i$, де $i \in \mathbb{N}$, і $f\colon X \to T$. Послідовність елементів $\{\langle f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ топологічного простору $\Psi(X)$ збігається до елемента $\langle f\rangle \in \Psi(X)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $i \geqslant N$ має місце нерівність $d_{HH}(\langle f_i\rangle, \langle f\rangle) \leqslant \varepsilon$. Тобто, для кожного $z \in Z_i$ існує елемент $t \in T$ такий, що

$$d_H(f_i^{-1}(z), f^{-1}(t)) \leqslant \varepsilon,$$

і навпаки для кожного $t \in T$ існує елемент $z \in Z_i$ такий, що

$$d_H(f^{-1}(t), f_i^{-1}(z)) \leqslant \varepsilon.$$

Далі використовуватимемо цей опис збіжності при доведенні властивостей і тверджень.

Розбиттям простору X називається сім'я $\mathcal{A}$ диз'юнктних підмножин простору X, об'єднання яких є весь простір X.

Проекцією або фактор-відображенням множини X на розбиття $\mathcal{A}$ є функція f, значенням якої в точці x є єдиний елемент множини $\mathcal{A}$, який містить точку x.

Множина X називається *щільною,* якщо вона не містить ізольованих точок. Замкнену щільну множину називають *досконалою.*

Множина M називається *граничною,* якщо її доповнення є всюди щільною підмножиною простору X, тобто $\overline{X \setminus M} = X$.

Множина топологічного простору X називається *G_δ-множиною,* якщо вона є перетином зліченної кількості відкритих множин простору X.

Множина топологічного простору X називається *F_σ-множиною,* якщо вона є об'єднанням зліченної кількості замкнених підмножин простору X.

Доповненням до множини типу F_σ є множини типу G_δ, і навпаки.

Добре відома теорема Мазуркевича (див. [5, с. 453]):

Теорема 4. *Кожна G_δ множина щільна і гранична в повному сепарабельному нульвимірному просторі гомеоморфна просторові ірраціональних чисел.*

2 Простір відкритих факторовідображень простору S

Нехай $X = S = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ — збіжна послідовність. Простір S є метричним, нульвимірним і компакним. Тоді гіперпростір другого порядку $\exp^2(S)$ теж є метричним, нульвимірним і компакним, як наслідок з теорем 1 і 2.

Розглянемо простір $\Psi(S)$. Згідно побудови $\Psi(S) \subset \exp^2(S)$, отже, простір $\Psi(S)$ нульвимірний.

Нехай $f_n\colon S \to f_n(S)$, де $f_n(S) = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ — дискретний простір, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Визначимо відображення f_n формулою:

$$f_n(x) = \begin{cases} y_i, \text{ якщо } x \in M_n = \{\frac{1}{2i} \mid i \leqslant n\}; \\ 0, \text{ якщо } x \in S \setminus M_n. \end{cases}$$

Нехай $f\colon S\to f(S)$, де $f(S)=\{s_0,s_1,s_2,\dots\}$ — збіжна послідовність з граничною точкою s_0. Відображення f задаємо наступним чином:

$$f(x)=\begin{cases} s_i, \text{ якщо } x\in M=\{\frac{1}{2i}|i\in\mathbb{N}\};\\ s_0, \text{ якщо } x\in S\setminus M.\end{cases}$$

Тоді $f_n\colon S\to f_n(S)$ — відкрите, сюр'єктивне неперервне відображення, для кожного $n\in\mathbb{N}$. Кожне відображення f_n, де $n\in\mathbb{N}$, визначає деякий фактороб'єкт простору S. Розглянемо відповідну послідовність $\langle f_n\rangle$ елементів простору $\Psi(S)$. Доведемо, що границею послідовності $\{\langle f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, при $n\to\infty$, в просторі $\exp^2(S)$ є клас $\langle f\rangle$, визначений відображенням $f\colon S\to f(S)$.

Розглянемо відстань

$$d_{HH}(\langle f_n\rangle,\langle f\rangle)=d_H(\{f_n^{-1}(f_n(x))\mid x\in S\},\{f^{-1}(f(x))\mid x\in S\}).$$

Можливі такі випадки:

1) якщо $x=\frac{1}{2i+1}$, то

$$d_H\left(f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right),f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right)\right)=d_H(S\setminus M_n,S\setminus M)$$
$$=d_H\left(S\setminus\left\{\frac{1}{2i}\mid 1\leqslant i\leqslant n\right\},S\setminus\left\{\frac{1}{2i}\mid i\in\mathbb{N}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2n};$$

2) якщо $x=\frac{1}{2i}$, то

$$d_H\left(f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{2i}\right)\right),f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2i}\right)\right)\right)=\begin{cases}\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{2i}\right|, \text{ якщо } n<i\\ 0, \text{ якщо } n\geqslant i.\end{cases}$$

Таким чином $d_{HH}(\langle f_n\rangle,\langle f\rangle)\leqslant\frac{1}{2n}$. Отже, послідовність $\{\langle f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента $\langle f\rangle$.

З іншого боку

$$\langle f_n\rangle=\{f_n^{-1}(f_n(s))\mid s\in S\}=\left\{\left\{\frac{1}{2}\right\},\dots,\left\{\frac{1}{2n}\right\},S\setminus\left\{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2n}\right\}\right\}=\mathcal{F}_n.$$

Очевидно послідовність $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до

$$\mathcal{F}=\left\{\left\{\frac{1}{2n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\right\}\cup\{\{0\}\}\cup\left\{S\setminus\left\{\frac{1}{2n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\right\}.$$

Для кожного $n\in\mathbb{N}$ згідно вибору елементів $\langle f_i\rangle$ виконується $\{0\}\in S\setminus\left\{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2n}\right\}$, отже, в границі $\{0\}\in\left\{S\setminus\left\{\frac{1}{2n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\right\}$, тобто $\mathcal{F}$ не є елементом множини $\Psi(S)$. Це показує некомпактність множини $\Psi(S)$.

Приймемо $\Psi_1=\{\langle f\rangle\in\Psi(S)\mid |f(S)|<\infty\}$ і $\Psi_2=\{\langle f\rangle\in\Psi(S)\mid |f(S)|=\infty\}$. Тоді $\Psi(S)=\Psi_1(S)\cup\Psi_2(S)$.

Лема 2.1. *Нехай* $\langle f\rangle \in \Psi(S)$. *Тоді еквівалентними є такі умови:*

1) $\langle f\rangle \in \Psi_2(S)$,

2) існує таке розбиття $S \setminus \{0\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, *де* $|A_i| < \infty$, *що*

$$\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in S\} = \langle f\rangle = \{\{0\}\} \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Доведення. 1) Нехай $\langle f\rangle \in \Psi_2(S)$, тоді $\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in S\}$ є нескінченною, диз'юнктною сім'єю підмножин в S. Покажемо, що $f^{-1}(f(0)) = \{0\}$. Справді, $f(0)$ — не ізольована точка. Якщо би $f(s) = f(0)$ для деякого $s \neq 0$, то $f(\{s\}) = \{f(0)\}$ не була би відкритою множиною, що суперечить відкритості відображення f.

Далі приймемо $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{f^{-1}(f(s)) \mid s \in S \setminus \{0\}\}$.

2) Нехай $S = \{0\} \cup A_i$, де $1 \leqslant |A_i| \leqslant \infty$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Розглянемо множину $Y = \{y\} \cup \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ і означимо відображення $f\colon S \longrightarrow Y$ формулою

$$f(x) = \begin{cases} y_i, \text{ якщо } x \in A_i; \\ y, \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$$

Наділимо Y фактортопологією, породженою відображенням f. Тоді, очевидно, Y гомеоморфний збіжній послідовності.

Покажемо, що відображення f відкрите. Покладемо O — відкрита підмножина простору S. Тоді:

1) Якщо $0 \in S \setminus O$, то $f(O) \subset Y \setminus \{y\}$ — відкрита множина;

2) Якщо $0 \in O$, тоді $S \setminus O$ — скінченна множина і

$$f(O) = \{y\} \cup \{y_i \mid A_i \cap O \neq \varnothing\} = Y \setminus \{y_i \mid A_i \cap O = \varnothing\}$$

— відкрите, як доповнення до скінченної множини. □

Твердження 2.1. *Підмножина* Ψ_1 *всюди щільна в просторі* $\Psi(S)$.

Доведення. Нехай $\langle f\rangle \in \Psi_2$, за лемою 1 $f\colon S \to X$ — неперервне відкрите відображення послідовності S на компактний гаусдорфовий простір X, де $|X| = \infty$. Тоді

$$\{f^{-1}(x) \mid x \in X\} = S = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де A_n — замкнені підмножини в S, для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки S — збіжна послідовність, то при достатньо великих значеннях індекса $n \in \mathbb{N}$ маємо $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ і $d_H(A_n, A_{n+1}) \to 0$. Нехай

$$O_\varepsilon(\langle f\rangle) = \{\langle g\rangle \in \Psi(X) \mid d_{HH}(\langle f\rangle, \langle g\rangle) < \varepsilon \text{ де } \varepsilon > 0\}.$$

Покладемо $X_k = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ — дискретний простір. Означимо послідовність відображень $g_k\colon S \to X_k$ наступним чином

$$g_k(x) = \begin{cases} i, \text{ якщо } x \in A_i \text{ де } 1 \leqslant i \leqslant k; \\ 0, \text{ якщо } x \in S \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \{A_i\}\right). \end{cases}$$

Знайдеться номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_{k_0}) < \operatorname{diam}(g_{k_0}^{-1}(0)) < \varepsilon$.

Нехай $x \in S \setminus \{0\}$. Знайдеться $A_i \subset S$ така, що $x \in A_i$. Якщо $i < k$, де $k > k_0$, тоді $f^{-1}(f(x)) = g_k^{-1}(i) = A_i$, отже, $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(g_k(x))) = 0$. Якщо $i > k_0$, то має місце $A_{k_0} \subset g_{k_0}^{-1}(0)$, отже, $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(0)) < \operatorname{diam} g_{k_0}^{-1}(0) < \varepsilon$.

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що справджується нерівність $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(0)) < \varepsilon$, тобто, всі елементи послідовності $\{\langle g_k \rangle\}_{i=1}^{\infty} \in \Psi_1$ починаючи з номера $k_0 \in \mathbb{N}$ містяться в ε-околі елемента $\langle f \rangle \in \Psi_2$. Отже, множина Ψ_1 всюди щільна в просторі $\Psi(S)$. □

Твердження 2.2. *Підмножина Ψ_2 є досконалою підмножиною простору $\Psi(S)$.*

Доведення. Нехай $\langle f \rangle \in \Psi_2$, за лемою 1 $f\colon S \to X$ — неперервне відкрите відображення послідовності S на компактний гаусдорфовий простір X, де $|X| = \infty$. Тоді

$$\{f^{-1}(x) \mid x \in X\} = S = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де A_n — замкнені підмножини в S, для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо послідовність $\{\langle g_j \rangle \mid \langle g_j \rangle \in \Psi_2(S), j \in \mathbb{N}\}$. Визначимо відображення $g_j\colon S \to Y_j$ наступним чином

$$g_j(s) = \begin{cases} y_i, \text{ якщо } s \in A_i, \text{ де } i < j; \\ y_j, \text{ якщо } s \in A_j \sqcup A_{j+1}; \\ y_k, \text{ якщо } s \in A_{k+1}, \text{ де } k < j+1; \\ 0, \text{ якщо } s = 0. \end{cases}$$

Розглянемо відстань

$$\begin{aligned} d_{HH}(\langle g_j \rangle, \langle f \rangle) &= d_H(\{g_j^{-1}(y_i) \mid y_i \in Y_j\}, \{f^{-1}(x) \mid x \in X\}) = \\ &= \min\{d_H(A_j, A_j \sqcup A_{j+1}), d_H(A_{j+1}, A_j \sqcup A_{j+1})\} \leqslant \operatorname{diam}(A_j \sqcup A_{j+1}). \end{aligned}$$

Отже, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_j) < \varepsilon/3$ і $d_H(A_j, A_{j+1}) < \varepsilon/3$, для всіх $j > N_0$. Тоді

$$d_{HH}(\langle g_n \rangle, \langle f \rangle) \leqslant \operatorname{diam}(A_j \sqcup A_{j+1}) < \varepsilon \text{ для всіх } j > N_0,$$

тобто, послідовність $\{\langle g_j \rangle\}_{j=1}^{\infty}$, де $\langle g_j \rangle \in \Psi_2(S)$, збігається до елемента $\langle f \rangle \in \Psi_2$, що доводить досконалість множини $\Psi_2(S)$. □

3 Топологічний тип простору $\Psi(X)$

Нехай X — метричний компакт. Позначимо через $\mathbb{D}$ множину диз'юнктних сімей замкнених підмножин простору X, що покривають весь X, тоді

$$\mathbb{D} = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid X = \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A\}.$$

Лема 3.1. *Множина* $\mathbb{D}$ *є множиною типу* G_δ *в* $\exp^2(X)$.

Доведення. Нехай $j \in \mathbb{N}$. Приймемо $\mathbb{C} = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid \cup\mathcal{A} = X\}$ — множина сімей замкнених підмножин простору X, які покривають весь X і

$$\mathbb{F}_j = \left\{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid \text{ існують } A, B \in \mathcal{A} \text{ такі, що } A \cap B \neq \varnothing \text{ і } d_H(A, B) \geqslant \frac{1}{j}\right\}.$$

Тоді $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{F}_j$. Оскільки відображення об'єднання $\bigcup\colon \exp^2 X \longrightarrow \exp X$ неперервне (див. [2]), одержуємо, що множина $\mathbb{C}$ замкнена в $\exp^2 X$.

Покажемо, що кожна множина $\mathbb{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$, замкнена в $\exp^2 X$. Справді, розглянемо послідовність $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ елементів множини $\mathbb{F}_j$, яка збігається до деякого елемента $\mathcal{A}$, переконаємося, що $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_j$. Отже, $\mathcal{A}_i \in \mathbb{F}_j$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді, для всіх $i \in \mathbb{N}$, існують $A_i, B_i \in \mathcal{A}_i$ такі, що $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ і $d_H(A_i, B_i) \geqslant \frac{1}{j}$. Із збіжності послідовності $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ до $\mathcal{A}$ випливає існування елементів $A, B \in \mathcal{A}$ таких, що послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігються до елементів A і B.

Нехай послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігаються до елементів A і B, відповідно. Тоді $d_H(A_i, A) \longrightarrow 0$ і $d_H(B_i, B) \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$. Оскільки

$$\frac{1}{j} \leqslant d_H(A_i, B_i) \leqslant d_H(A_i, A) + d_H(A, B) + d_H(B, B_i),$$

то при $i \longrightarrow \infty$ отримаємо $\frac{1}{j} \leqslant d_H(A, B)$.

Отже, $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_j$, що доводить замкненість множини $\mathbb{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$ в просторі $\exp^2 X$. Тоді множина $\mathbb{D}$ є доповненням до множини типу F_σ, а, отже, є G_δ-множиною. □

Метричний простір X називається *ніде не локально компактним,* якщо для кожного $x \in X$ існує $r > 0$ таке, що для всіх $s < r$ множина $\overline{O_s(x)}$ не є компактною.

Твердження 3.1. *Простір* $\Psi_2(X)$ *ніде не локально компактний.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\langle f\rangle \in \Psi_2(X)$. Покажемо, що множина $\overline{O_\varepsilon(\langle f\rangle)}$ некомпактна. Розглянемо елемент $\langle f\rangle \in \Psi_2(X)$, тоді

$$\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\} = \langle f\rangle = A_0 \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Відповідне відображення $f\colon X \longrightarrow f(X)$ задається формулою $f(x) = a_1$, якщо $x \in A_i$ при $i = 0, 1, 2\ldots$ Оскільки X — метричний компакт, то $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ і $d_H(A_n, A_{n+1}) \to 0$, при достатньо великих значеннях $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо замикання ε-околу елемента $\langle f\rangle$

$$\overline{O_\varepsilon(\langle f\rangle)} = \{\langle g\rangle \in \Psi_2(X) \mid d_{HH}(\langle f\rangle, \langle g\rangle) \leqslant \varepsilon\}.$$

Для вибраного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$ і $d_H(A_n, A_{n+1}) < \varepsilon$ для всіх $n > n_0$.

Розглянемо послідовність елементів $\langle f_i\rangle$, простору $\Psi_2(X)$, де $i \in \mathbb{N}$ і відображення $f_i\colon X \longrightarrow f_i(X)$ визначається формулою

$$f_i(x) = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x \in A_j \text{ при } j \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\} \setminus \{n_0, n_0+1, n_0+1+i, n_0+2+i\}; \\ y_{n_0}, \text{ якщо } x \in A_{n_0} \sqcup A_{n_0+1+i}; \\ y_{n_0+1}, \text{ якщо } x \in A_{n_0+1} \sqcup A_{n_0+2+i}. \end{cases}$$

Таким чином, $f_i(X) = \{y_i \mid i \in (\{0\} \cup \mathbb{N}) \setminus \{n_0+1+i, n_0+2+i\}\}$. Простір $f_i(X)$, очевидно, гомеоморфний збіжній послідовності з неізольованою точкою y_0. Тоді $\langle f_i\rangle \in \overline{O_\varepsilon(\langle f\rangle)}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Справді, розглянемо відстань

$$d_{HH}(\langle f_i\rangle, \langle f\rangle) = d_H(\{f_i^{-1}(f_i(x)) \mid x \in X\}, \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}) \leqslant$$
$$\leqslant d_H(A_{n_0} \sqcup A_{n_0+1+i}, A_{n_0+1} \sqcup A_{n_0+2+i}) \leqslant \max\{d_H(A_{n_0}, A_{n_0+1}), d_H(A_{n_0+1+i}, A_{n_0+2+i})\} < \varepsilon.$$

Послідовність $\{\langle f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ в просторі $\exp^2 X$ збігається до елемнта

$$\widetilde{\langle f\rangle} = \{0\} \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{n_0+1+i, n_0+2+i\}\} \cup \{A_{n_0} \cup \{0\}, A_{n_0+1} \cup \{0\}\}.$$

Оскільки ця сім'я не дизюнктна, то вона не належить $\Psi(X)$. Отже, в ε-околі елемента $\langle f\rangle \in \Psi_2(X)$ існує послідовність $\{\langle f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$, границя якої не належить замиканню $\overline{O_\varepsilon(\langle f\rangle)}$. Отже, простір $\Psi_2(X)$ ніде не локально компактний.

За характеризаційною теоремою 3 для множини ірраціональних чисел одержуємо, що $\Psi_2(S) \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

4 Висновки

Відкритою залишається проблема опису топології простору $\Psi(X)$ для інших метризовних нульвимірних просторів. Сформулюємо гіпотезу: для досконалої канторової множини C простір $\Psi(C)$ гомеоморфний просторові ірраціональних чисел. Природною є також задача про перенесення одержаних результатів на неметризовний випадок, зокрема, на випадок, коли X є суперпослідовністю ваги τ (одноточковою компактифікацією дискретного простору потужності τ).

Література

1. Выборнов А.Н. *Пространства компактных подмножеств нульмерных польских пространств с всюду плотным множеством изолированых точек* // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, Вып. 4(238). — С. 153–154.

2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів. — К.: ІСДО, 1993. — 108 с.

3. Копорх К. *Топології на множині фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору* // Праці міжнародного геометричного центру. — 2010. — Т.3, №3. — С. 40–47.

4. Копорх К. *Топологія Вієторіса на просторі відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору* // Праці міжнародного геометричного центру. — 2010. — Том 3, №4. — С. 35–42.

5. Куратовський К. Топология. Т.1. — М.: Мир, 1969. — 332 с.

6. Федорчук В.В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988. — 252 с.
7. Reiter A., Reiter H. *The Space of Closed Subsets of a Convergent Seqence,* Math. Mag., **69**, 3 (1996), 217–221.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *katerynka.k@gmail.com*

Надійшло 02.03.2012

Koporkh K.M. *On space of open quotient maps of a convergent sequence*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 58–66.

We consider the space of the classes of equivalences of continuous open maps defined on a convergent sequence induced by the Hausdorff metric. We show that $\Psi(S)$ is a perfect zero-dimensional noncompact metric space which can be decomposed into the union of two sets, one of which is dense and the other is homeomorphic to the set of irrational numbers.

Копорх К.М. *Пространство открытых факторотображений сходящейся последовательности* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 58–66.

Рассматривается пространство классов эквивалентности открытых отображений последовательности в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа. Пространство открытых факторотображений последовательности можно рассматривать как объединение двух подмножеств, одно из которых всюду плотно в пространстве открытых факторотображений, а второе гомеоморфное множеству иррациональных чисел.