МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА»

Кафедра економічної кібернетики

І.В. Буртняк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації
для студентів спеціальності економіка, економічна кібернетика

Івано-Франківськ
2021

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050я73

Автор: доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики Буртняк Іван Володимирович

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради економічного факультету Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника (протокол № 5 від 22 вересня 2021 року)

Рецензент:

Дмитришин М.І. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики, ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.

Малицька Г.П.– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.

Буртняк І.В.

Вища математика: методичні рекомендації для студентів спеціальності економіка, економічна кібернетика. – Івано-Франківськ: .

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу всіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал та велику кількість розв’язаних прикладів,

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050я73

Вступ

Вивчення курсу вищої математики забезпечує розвиток математичного та логічного мислення студентів, їх підготовку до вивчення спеціальних дисциплін і самостійної роботи над науковою та науково-технічною літературою, передбачає ознайомлення з основними поняттями, ідеями та методами сучасної математики, можливостями їх використання при розв'язуванні конкретних задач.

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають на практиці.

Результати навчання:

7. Пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки.

8. Застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач.

15. Демонструвати базові навички креативного та критичного мислення у дослідженнях та професійному спілкуванні.

21. Вміти абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів.

23. Показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне, самокритичне мислення.

Компетентності:

ІК - Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в економічній сфері, які характеризуються комплексністю та невизначеністю умов, що передбачає застосування теорій та методів економічної науки.

ЗК3. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК4. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК9. Здатність до адаптації та дій в новій ситуації.

ЗК11. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

СК6. Здатність застосовувати економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач.

СК14. Здатність поглиблено аналізувати проблеми і явища в одній або декількох професійних сферах з врахуванням економічних ризиків та можливих соціально-економічних наслідків.

Лекція 1. Елементи лінійної алгебри.

§1. Матриці та дії над ними.

1.1. Основні означення.

Означення. Множину дійсних чисел, записану у вигляді прямокутної таблиці, яка має n рядків і m стовпців, називають матрицею розміру n×m і позначають

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$; $A = \|a_{ij}\|$.

Числа a_{ij} називають елементами матриці. Перший індекс i числа a_{ij} вказує на номер рядка, в якому він перебуває, другий індекс j – на номер стовпця.

Матриця називається нульовою, якщо всі її елементи рівні нулю. Нульова матриця позначається літерою 0.

Якщо в матриці A (1.1) $n = m$, то вона називається квадратною матрицею порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Елементи $a_{11,}\ a_{22,}\ a_{33,\dots,}\ a_{nn}$ утворюють головну діагональ квадратної матриці (1.2), а елементи $a_{n1,}\ a_{n-1\,2,}\ a_{n-2\,3,\dots,}\ a_{1n}$ - її побічну діагональ.

Кожній квадратній матриці $A = (a_{ij})$ порядку n ставиться у відповідність деяке число, правило обчислення якого буде сформульовано нижче. Це число називають визначником (детермінантом) n -го порядку і позначають

$$detA = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається літерою E. Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

Матриця розміру $1 \times n$ називається матрицею-рядком, а розміру $n \times 1$ – матрицею-стовпцем.

Дві матриці $A_{n\times m} = (a_{ij})$ та $B_{n\times m} = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і всі їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,m}$.

1.2. Дії над матрицями.

1°. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число β називають матрицю βA, елементи якої дорівнюють добутку числа β на всі відповідні елементи матриці A:

$$\beta A = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \cdots & \beta a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta a_{n1} & \beta a_{n2} & \cdots & \beta a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Приклад 1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ -6 & 12 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

2°. Операція додавання матриць визначена лише для матриць однакового розміру. Сумою двох матриць $A_{n\times m} = (a_{ij})$ та $B_{n\times m} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{n\times m} = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1.6)$$

Приклад 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & -2+3 \\ 5+4 & -1+2 & 3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3°. Різницею матриць A та B називається сума матриці A і матриці B, помноженої на –1: $A - B = A + (-1)B$.

4°. Операція множення двох матриць визначена лише для узгоджених матриць. Матриця A називається узгодженою з матрицею

B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B. Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, то звідси не випливає те, що матриця B узгоджена з матрицею A.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n \times p$ називають матрицю $C = (c_{ij})$розміру $m \times p$, елементи якої визначаються за формулою ($C = AB$)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,; \qquad (1.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p)$$

тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j- го стовпця матриці B.

В загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 3. Знайти добуток матриць AB, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця A розміру 2×3, а матриця B розміру 3×3. Тому матриця A узгоджена з матрицею B і добуток AB можна обчислити. Матриця $C = AB$ має розмір 2×3.

Маємо

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -4 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -10 \\ -8 & 22 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матриці B і A перемножити не можна, бо вони не узгоджені.

Операція множення матриць не комутативна, тобто $AB \neq BA$. Покажемо це на прикладі. Нехай маємо матриці A і B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже $AB \neq BA$.

Слід зауважити, що для того, щоб добутки AB і BA були не тільки визначені, але й мали однаковий розмір, необхідно і достатньо, щоб обидві матриці A та B були квадратними матрицями одного і того ж порядку.

Легко також перевірити, що дії над матрицями задовольняють наступним властивостям:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A, \quad A - A = 0$
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $A(B + c) = AB + AC$
8. $(AB)C = A(BC)$
9. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$
10. $AE = EA = A$
11. $A \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot A = 0$
12. $det(AB) = detA \cdot detB$

Тут α та β - довільні числа, а A, B, C – матриці, E – одинична матриця, 0 – нульова матриця.

§ 2. Визначники.

2.1. Визначники другого та третього порядку та їх властивості.

Вираз $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ (2.1)

називається визначником (детермінантом) другого порядку. Для його обчислення потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів другої діагоналі.

Приклади 4. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = 6 + 20 = 26.$

б) $\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$

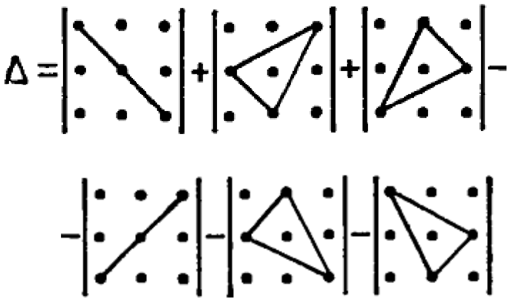
Вираз

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} -$$

$$-a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} \qquad (2.2)$$

називається визначником (детермінантом) третього порядку.

Нижче запишемо схему обчислення визначника третього порядку.



(2.3)

Визначник третього порядку (2.2) обчислюється за правилом трикутника (2.3): перший доданок в правій частині формули є добуток елементів, що стоять на головній діагоналі, другий і третій доданки є добутками елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно знаходяться доданки зі знаком мінус, де за основу береться друга діагональ.

Приклад 5. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3) + (-2)\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 1 -$$

$$-(-2)\cdot 3\cdot(-3) - 5\cdot 4\cdot 1 = -6 - 10 + 48 - 8 - 18 - 20 = -14\,.$$

Розглянемо на прикладі визначників третього порядку основні властивості визначників. Всі вони доводяться безпосередньою перевіркою. Пропонується зробити це самостійно.

Властивості визначників:

1^0. Якщо у визначнику замінити всі його рядки відповідними стовпцями (транспонувати) то величина визначника при цьому не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дана властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців визначника.

2^0. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить свій знак на протилежний. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3^0. Якщо у визначнику є нульовий рядок (стовпець), то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4^0. Якщо у визначнику є два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

5^0. Спільний множник, що міститься в усіх елементах довільного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Якщо у визначнику елементи будь-яких двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7^0. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких вказаний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого з других. Інші рядки (стовпці) усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

8^0. Якщо до елементів довільного рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то визначник при цьому не зміниться. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Нехай задано визначник n -го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з даного визначника викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Наприклад, для визначника третього порядку $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Мінорами елементів a_{21} та a_{33} будуть відповідно визначники другого порядку: $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчні доповнення елементів a_{21} та a_{33} рівні відповідно:

$A_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = -\, M_{21}, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = M_{33}.$

Якщо, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -26.$

Теорема 1.1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на їхні алгебраїчні доповнення.

Тобто для визначника (2.4) виконуються такі рівності:

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \qquad (2.5)$$

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} \qquad (2.6)$$

(2.5) та (2.6) - розклади визначника (2.4) відповідно за елементами першого рядка та першого стовпця визначника.

Аналогічно можна записати розклад визначника (2.4) за довільним рядком або стовпцем.

Покажемо це на прикладі обчислення визначника третього порядку.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для нього існує лише шість різних розкладів (бо він має три рядки та три стовпці). Запишемо всі ці рівності.

$$\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \quad \Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta_3 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \quad \Delta_3 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}; \quad (2.7)$$
$$\Delta_3 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \quad \Delta_3 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами другого стовпця.

За п'ятою з формул (2.7): $\Delta_3 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ маємо

$$\Delta_3 = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+5 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-10) + 2 \cdot (-7) + (-5) \cdot 6 = -14.$$

Отже ми отримали той же результат, що і в прикладі 5, розв'язавши його іншим способом.

Теорема 1.2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Пункт 2.3 для самостійного ознайомлення бажаючих.

2.3. Визначники вищих порядків.

За допомогою теореми 1.1 можна обчислити визначник довільного порядку. Для цього можна використати зокрема формули (2.5) або (2.6). Але якщо для обчислення за вказаною теоремою визначника четвертого порядку потрібно обчислити 4 визначника третього порядку, то для обчислення визначника п'ятого порядку потрібно вже обчислити 5 визначників четвертого порядку або 20 визначників третього порядку і після цього знайти відповідну суму. А це вже досить громіздкі обчислення. Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8^0 перетворюють заданий визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою 1.1 за елементами цього рядка чи стовпця, дістанемо лише один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад 7. Обчислити визначник:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

У першому стовпчику перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий помножений на (-2), до третього - другий помножений на (-3), а до четвертого - другий помножений на 2. Тоді отримаємо

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2-2 & 3-8 & -2-2 & 5-10 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3-3 & 1-12 & 4-3 & 2-15 \\ -2+2 & 2+8 & 3+2 & 1+10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & 1 & -13 \\ 0 & 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, отримаємо

$$\Delta_4 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

У нас елементи першого рядка визначника мають спільний множник(-1). Використовуючи властивість 5^0, винесемо цей множник за знак визначника. Тоді отримаємо: $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10 & 5 & 11 \end{vmatrix}$.

У другому стовпчику перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий помножений на (-4), до третього - другий помножений на (-5). Тоді отримаємо

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5+44 & 4-4 & 5+52 \\ -11 & 1 & -13 \\ 10+55 & 5-5 & 11+65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 & 57 \\ -11 & 1 & -13 \\ 65 & 0 & 76 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, отримаємо

$$\Delta_4 = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 49 & 57 \\ 65 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 57 \\ 65 & 76 \end{vmatrix} =$$

$$= 49 \cdot 76 - 65 \cdot 57 = 19.$$

§ 3. Обернена матриця.

Матриця B називається оберненою до квадратної матриці A, якщо

$$BA = AB = E.$$

Позначають обернену матрицю $B = A^{-1}$, тоді

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Отже, матриця, обернена до даної, - це така матриця, в добутку з якою отримаємо одиничну матрицю. Ясно, що обернені матриці можуть мати тільки квадратні матриці.

Нехай ми маємо квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

Квадратна матриця A називається невиродженою, коли її визначник відмінний від нуля ($det\ A \neq 0$). У противному випадку матриця A називається виродженою ($det\ A = 0$).

Теорема 1.3. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

При цьому обернену матрицю можна обчислити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Сам вигляд формули A^{-1} вказує на спосіб її обчислення: знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента матриці A і підставляємо їх у формулу (3.2).

Розглянемо окремі випадки формули (3.2).

Для квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ другого порядку обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Приклад 8. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-21) = 11 \neq 0.$$

Отже, існує обернена A^{-1}, так як задана матриця A – невироджена. Знаходимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-5) = -5;$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 7 = -7;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3;$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$

Отже згідно формули (3.3.), $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Можна переконатись, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Для квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третього порядку обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Приклад 9. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (-3) - (-4) = 19 \neq 0.$$

Отже, існує обернена A^{-1}, так як задана матриця A – невироджена. Знаходимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$

Отже згідно формули (3.4.), $A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Можна переконатись, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Лекція 2.

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера та матричним методом.

§ 4.Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

4.1. Основні означення.

Система співвідношень виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

де a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$ - довільні дійсні числа, називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$. Числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи, а числа b_i-вільними членами системи.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, тобто

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Якщо ж хоч один вільний член системи відмінний від нуля, то вона називається неоднорідною.

Деяка множина чисел називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано порядковий номер кожного числа даної множини.

Упорядкований набір n чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ називається розв'язком системи (.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь завжди є сумісною, тому що тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *завжди перетворює її в тотожність.*

Якщо система (4.1) не має жодного розв'язку, вона називається несумісною.

Сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок.

Сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь називається невизначеною, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними, якщо множини їх розв'язків однакові.

Коли матриця вільних членів не нульова, то система називається неоднорідною.

Матрицею коефіцієнтів системи (4.1) називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Розширеною матрицею системи (4.1) називається матриця

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{4.3}$$

Матриця $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ є матрицею вільних членів системи (4.1), а матриця $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ є її матрицею невідомих.

В матричному вигляді систему (4.1) можна записати так

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

або $$AX = B \tag{4.5}$$

Якщо в системі (4.1) $m = n$, то говорять, що кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих системи. В цьому випадку система (4.1) запишеться в такому виді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.6}$$

Відповідні матриці системи (4.6) запишуться таким чином:

Матриця коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (4.7)

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ і $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$- матриці відповідно вільних членів і невідомих системи (4.6).

Тоді систему (4.6) можна записати за допомогою матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

або $AX = B$ (4.9)

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Правило Крамера застосовується для розв'язування систем лінійних рівнянь (4.6), в яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник матриці коефіцієнтів системи (4.7) відмінний від нуля.

Правило Крамера. Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4.6). Визначник матриці коефіцієнтів системи (4.7) $\Delta = det\, A \neq 0$. Тоді система (4.6) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (4.10)$$

де визначник Δ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ отримується із визначника Δ заміною в ньому i -го стовпця стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.11)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, першу з формул (4.10). Для цього перше рівняння системи (4.6) на A_{11} *, друге на* A_{21} *,…,* n *-е на* A_{n1} *і одержані рівняння додамо. Тоді*

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) +$$
$$+ \cdots A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$

Після групування доданків маємо

$$x_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \cdots + A_{n1}a_{n1}) +$$
$$+x_2(A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \cdots + A_{n1}a_{n2}) + \cdots$$
$$+x_n(A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \cdots + A_{n1}a_{nn}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$

Сума в перший дужці – розклад визначника матриці (4.7) за елементами першого стовпця. Всі інші суми в дужках – суми добутків алгебраїчних доповнень елементів першого стовпця на елементи інших стовпців. Згідно теореми 1.2 всі ці суми дорівнюють нулю. Сума $b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$*– розклад визначника*

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами першого стовпця. Таким чином $x_1 \cdot \Delta = \Delta_1$*, звідки* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно (в загальному випадку) щоб знайти x_i *для довільного* i*, множимо перше рівняння системи (4.6) на* A_{1i}*, друге на* A_{2i}*, ... ,* n *-е – на* A_{ni}*, одержані рівності складаємо і отримаємо формули Крамера (4.10).* ■

Зауваження. *Якщо система (4.6) однорідна, то всі визначники (4.11)* $\Delta_i = 0$*, оскільки в кожному з них* i *-й стовпець складається з нулів. Тому така система, при умові* $\Delta \neq 0$ *має єдиний нульовий розв'язок.*

Найпростіші випадки застосування правила Крамера.

1) Система двох рівнянь з двома невідомими.

Нехай маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (4.12)$$

Тоді $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. (4.13)

Можливі такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (4.14)$$

2) $\Delta = 0$ і $\Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$, тоді система (4.12) є несумісною, тобто не має розв'язків.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, тоді система (4.12) зводиться до одного рівняння і є невизначеною, тобто має безліч розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}.$$

В нашому випадку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 67$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = -2$. Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{67}{11} = 6\frac{1}{11}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{11}$.

2) Система трьох рівнянь з трьома невідомими.

Нехай маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (4.15)$$

Тоді $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.16)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (4.17)$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ за формулами Крамера.

В нашому випадку $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\Delta = det\, A = 5$ $\Rightarrow$ отже система має єдиний розв'язок який знаходимо за формулами Крамера.

Так як,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$

То $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$.

Розв'язком системи є матриця-стовпець $X = (4; 2; 1)^T$.

4.3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних рівнянь (4.6), в якій кількість рівнянь дорівнює кількість невідомих і її матричний запис (4.9), тобто рівняння $AX = B$. Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то існує обернена до неї матриця A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння (4.9) на матрицю A^{-1} зліва і отримаємо рівняння:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Так як $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B \qquad (4.18)$$

Це і є матричний розв'язок системи лінійних рівнянь (4.6).

Отже, для розв'язання системи рівнянь (4.6), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи і помножити її справа на матрицю вільних членів системи.

Матричний розв'язок системи застосовується тільки тоді, коли матриця системи невироджена.

Приклад 3. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}.$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів A заданої системи $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, тоді $det\, A = 12 \neq 0$ та існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її. Для цього спочатку обчислимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \;\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \;\; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \;\; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; \;\; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \;\; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \;\; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Тоді маємо

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

так як $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$, то остаточно маємо

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 40 - 5 - 11 \\ -20 + 7 - 11 \\ -20 + 1 + 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи є матриця-стовпець $X = (2; -2; 3)^T$.

4.4. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Серед багатьох методів розв’язку систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях систем рівнянь.

Означення. Елементарними перетвореннями над системою рівнянь є такі перетворення над її рівняннями:

1. Перестановка місцями будь-яких двох рівнянь системи;
2. Множення довільного рівняння системи на деякий сталий, відмінний від нуля множник;
3. Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння помноженого на довільне число.

Лекція 4.

Тема. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

4.4. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Серед багатьох методів розв’язку систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях систем рівнянь.

Означення. Елементарними перетвореннями над системою рівнянь є такі перетворення над її рівняннями:

1. Перестановка місцями будь-яких двох рівнянь системи;
2. Множення довільного рівняння системи на деякий сталий, відмінний від нуля множник;
3. Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння помноженого на довільне число.

Нехай маємо систему m рівнянь з n невідомими виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.19)$$

Очевидно, що серед коефіцієнтів a_{k1} $(k = \overline{1, m})$ є хоча б один відмінний від нуля. Якщо $a_{11} \neq 0$, то перше рівняння системи (4.19) залишимо без змін. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим в системі (4.19) запишемо те рівняння, яке має відмінний від нуля коефіцієнт при x_1. Виключимо тепер x_1 з усіх рівнянь системи (4.19), починаючи з другого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо до другого рівняння, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього рівняння і т.д. В результаті отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (4.20)$$

<u>Зауваження 1.</u> Якщо на будь-якому кроці перетворень системи рівнянь за допомогою методу Гауса ми отримаємо хоч одне рівняння виду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_j$, де $b_j \neq 0$, то система рівнянь (4.19) є несумісною, так як жоден набір невідомих не може задовільнити таке рівняння.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо на будь-якому кроці перетворень системи рівнянь за допомогою методу Гауса ми отримаємо отримаємо одне або більше рівнянь виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$. То такі рівняння ми відкидаємо з системи. І тому отримана в результаті перетворень система може мати менше ніж m рівнянь.

Далі вважаємо, що в системі (4.20) коефіцієнт $a'_{22} \neq 0$ і аналогічно виконуємо перетворення, що виключають x_2 з усіх рівнянь системи (4.20), починаючи з третього. В результаті отримаємо систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases} \qquad (4.21)$$

<u>Зауваження 3</u>. Може так статись, що в системі (4.20) коефіцієнти при x_2 в усіх рівняннях системи, починаючи з другого, рівні нулю. Тобто маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (4.22)$$

Тоді вважаючи, що в системі (4.22) коефіцієнт $a'_{23} \neq 0$ і аналогічно виконуємо перетворення, що виключають x_3 з усіх рівнянь системи (4.20), починаючи з третього і т.д.

Продовжуючи цей процес, ми прийдемо до одного з двох випадків:

1. Після деякого кроку отримаємо систему, яка містить рівняння виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$, де $b \neq 0$. Тоді задана система (4.19) несумісна.
2. Система зводиться до виду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r + b_{1\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r + b_{2\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{rr}x_r + b_{r\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{rn}x_n = c_r \end{cases} \qquad (4.23)$$

При цьому можливі такі випадки:

а) $r = n$. Тоді система (4.23) має вигляд:

$$
\begin{cases}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\
\qquad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\
\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\quad b_{nn}x_n = c_n
\end{cases}
\qquad (4.24)
$$

З останнього рівняння системи знаходимо $x_n = \frac{c_n}{b_{nn}}$. Знайдене значення x_n підставляємо в передостаннє рівняння системи

$$b_{n-1,n-1}x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = c_{n-1}.$$

Знаходимо x_{n-1} і т.д. Остаточно з першого рівняння знаходимо x_1. Отже в даному випадку система має єдиний розв'язок.

б) $r < n$. Тоді з останнього рівняння системи (4.23) знаходимо $x_r = \frac{1}{b_{rr}}(c_r - b_{r\,r+1}x_{r+1} - b_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{rn}x_n)$, з передостаннього - x_{r-1} і т.д. Остаточно з першого рівняння знаходимо x_1. В даному випадку основні невідомі x_1, x_2, …,x_r будуть виражатись через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n. Вільним невідомим можна надавати довільні значення, тому система рівнянь в даному випадку має безліч розв'язків.

Зауваження 4. Розв'язуючи систему лінійних рівнянь методом Гауса, зручніше здійснювати елементарні перетворення не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці $\bar{A}$ відповідної системи рівнянь.

Покажемо це на прикладах.

Приклад 1.14. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь.

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\
3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\
3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4
\end{cases}
$$

Виписуємо розширену матрицю системи і виконуємо над рядками цієї матриці елементарні перетворення

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\
3 & 4 & 14 & 9 & 4
\end{array}\right) \rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\
3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\
3 & 4 & 14 & 9 & 4
\end{array}\right) \rightarrow
$$

Поміняли місцями перший та другий рядки розширеної матриці. Після цього під елементом a_{11}, а потім і під елементом a_{22} за допомогою елементарних перетворень робимо нулі.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & -1 & -7 & -2 & -4 \\
0 & 1 & -1 & 3 & -5
\end{array}\right) \rightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\
0 & 0 & -2 & 2 & -4
\end{array}\right) \rightarrow
$$

Після цього помножимо четвертий рядок останньої матриці на $-\frac{1}{2}$ і поміняємо місцями третій та четвертий рядки. На останньому кроці робимо нуль під елементом a_{33}.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Після цього помножимо четвертий рядок останньої матриці на $-\frac{1}{7}$.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\ (*)$$

З розширеної матриці $(*)$ повернемось до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3\\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = -1\\ \quad\quad x_3 - x_4 = 2\\ \quad\quad\quad x_4 = -1\end{cases}$$

Далі піднімаючись в системі рівнянь знизу вверх знаходимо розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 + 1 - 5 + 2 = 1\\ x_2 = -1 - x_3 - x_4 = -1 - 1 + 1 = -1\\ x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1\\ x_4 = -1\end{cases}$$

тобто розв'язок має вигляд $X = (1;\ -1;\ 1;\ -1)^T$.

Приклад 1.15. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3\\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 7\end{cases}$$

Маємо розширену матрицю системи.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & 1 & -1 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів першого рядка.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 6 & -3 & -5 & 1\\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Після цього під елементом a_{11} за допомогою елементарних перетворень робимо нулі. Для цього помножимо елементи першого рядка матриці на (-3) і додамо до відповідних елементів другого рядка. Далі помножимо елементи першого рядка матриці на (-5) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 2 \end{array}\right) \to$$

Тепер помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка. Тоді отримаємо:

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

З останнього рядка матриці випливає, що система несумісна, тобто дана система розв’язків не має.

Приклад 1.16. Розв’язати методом Гауса систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи і поміняємо місцями її перший та другий рядки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

Помножимо елементи першого рядка матриці на (-2) і додамо до відповідних елементів другого рядка. Після цього помножимо елементи першого рядка матриці на (-3) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю:

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \to$$

Помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right).$$

На останньому кроці ми закреслили нульовий рядок (третій).

За базисні невідомі вибираємо x_1, x_2, так як визначник із коефіцієнтів при них відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Далі існує два способи подальшого розв’язання.

Спосіб 1. Невідомі x_3 та x_4 переносимо в праві частини рівнянь :

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ \quad -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases}. \sim$$

Звідки

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \\ x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 \end{cases}.$$

Спосіб 2. За допомогою елементарних перетворень отримаємо в розширеній матриці в блоці базисних невідомих одиничну матрицю. Для цього спочатку помножимо другий рядок матриці на $\left(-\frac{1}{5}\right)$. Після цього помножимо другий рядок матриці на (-2) і додамо до першого рядка. В результаті отримаємо:

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{5} & -\frac{17}{5} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{5} & -\frac{17}{5} \end{array}\right)$$

Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{4}{5} \\ x_2 - x_3 + \frac{7}{5}x_4 = -\frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення $x_3 = c_1$ і $x_4 = c_2$, знаходимо нескінчену множину розв'язків заданої системи

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2, \quad c_1, c_2 \epsilon R. \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$ Тоді

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad c_1, c_2 \epsilon R$$ або

$$X = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ c_1;\ c_2\right)^T,$$ де $c_1, c_2 \epsilon R$.

Зауваження 5. Формули Крамера і матричний метод мають місце лише для випадку $m = n$ (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих) і при цьому визначник відповідної матриці коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. А метод Гауса застосовується для будь-яких натуральних значень m та n (довільна кількість рівнянь і невідомих) і при цьому ніякі додаткові умови на матрицю коефіцієнтів системи не накладаються.

Тема. Вектори. Лінійні операції над векторами. Базис. Розклад по базису. Скалярний добуток векторів.

§1. Вектори. Лінійні операції над векторами.

1.1. Вектори.

Велика кількість фізичних величин визначається тільки своїм числовим значенням і їх називають скалярними величинами. Прикладами скалярних величин є довжина, площа, об'єм, температура, густина, маса та ін. Але є фізичні величини, які крім числового значення мають і напрям. Такі величини називають векторними. Прикладами таких величин є сила, швидкість, прискорення, момент сили, напруженість магнітного поля та ін.

Вектором називається довільна упорядкована пара точок A і B простору, що визначає напрямлений відрізок. Перша точка відрізку вважається початком вектора, а друга його кінцем. Вектор з початком A і кінцем B позначають символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Відстань між початком вектора та його кінцем називається довжиною або модулем вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$або $|\vec{a}|$).

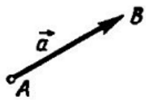


Рис. 1

Вектор $\overrightarrow{AA}$, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим вектором і позначається $\vec{0}$. Модуль цього вектора дорівнює нулю, а напрям невизначений.

Вектор довжина якого дорівнює одиниці називається одиничним вектором. Одиничний вектор напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^0$.

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих називають колінеарними. Якщо колінеарні вектори мають однаковий напрям, то їх називають співнапрямленими і позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Якщо колінеарні вектори мають протилежні напрями, то їх називають протилежно напрямленими і позначають $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Нульовий вектор колінеарний з будь-яким вектором.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають рівними $\left(\vec{a} = \vec{b}\right)$, якщо вони колінеарні, співнапрямлені та мають рівні модулі.

В означенні рівності векторів не вказано нічого про їх конкретне розміщення в просторі, тому вектори можна переносити паралельно самим собі в просторі, не порушуючи при цьому умову рівності векторів. Тому в аналітичній геометрії всі вектори вважаються вільними.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають протилежними $\left(\vec{a} = -\vec{b},\right.$ або $\left.\vec{b} = -\vec{a}\right)$, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені та мають рівні модулі.

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема три вектори є компланарними, якщо хоча б два з них є колінеарні.

1.2. Лінійні операції над векторами.

1) Додавання векторів. Сумою двох векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінець – з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$ (Правило трикутника).

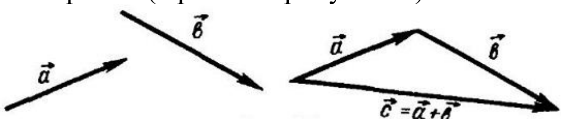


Рис. 2

Додавати два вектори можна і за правилом паралелограма. При цьому обидва вектори приводяться до спільного початку і на них будується паралелограм. Тоді діагональ $\overrightarrow{AC}$ паралелограма і є сумою заданих векторів.

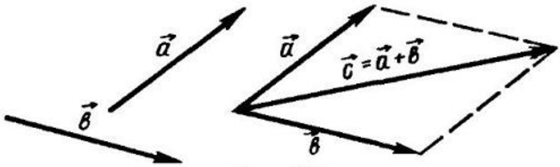


Рис. 3

Поняття суми векторів поширюється і на довільне скінчене число векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Спочатку з допомогою паралельного переносу вектори розташовуємо в ланцюг, тобто так, щоб початок наступного вектора був кінцем попереднього.

Тоді сумою векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається вектор, в якого початок збігається з початком вектора $\vec{a}_1$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{a}_n$. Це записують так: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$. Якщо при цьому $\vec{a} = \vec{0}$, то говорять, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ утворюють замкнену систему векторів.

Наприклад $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

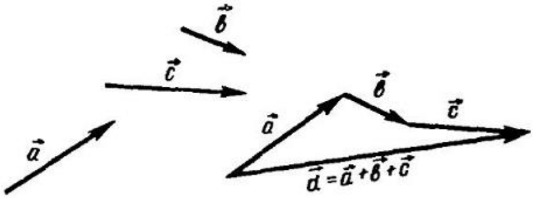


Рис. 4

2) Віднімання векторів. Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів називають такий вектор $\vec{c}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб отримати вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

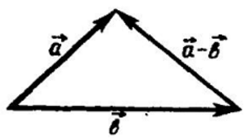


Рис. 5

Геометричне зміст різниці векторів: якщо вектор $\vec{a} + \vec{b}$ розміщений на одній діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, то $\vec{a}-\vec{b}$ лежить на іншій діагоналі цього ж паралелограма.

3) Множення вектора на число. Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число $\lambda \in R$, називається вектор $\lambda\vec{a}$ довжина якого дорівнює довжині вектора $\vec{a}$, помноженій на абсолютну величину числа λ, тобто $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний йому, коли $\lambda < 0$.

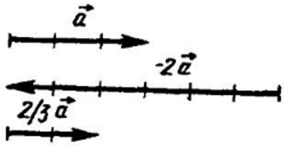


Рис. 6

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$, то вектор $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, тобто є нульовим.

Використовуючи означення множення вектора на число, можна сформулювати такі твердження:

1) Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають колінеарними, якщо існує число λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Якщо $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

2) Якщо вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, то його орт $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

Операція додавання векторів має такі властивості:

1) Комутативність суми векторів: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.
2) Асоціативність суми векторів: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3) Комутативність добутку вектора на число: $\lambda\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\lambda$.
4) Асоціативність добутку вектора на число: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.
5) Дистрибутивність добутку вектора на суму чисел:
$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \qquad (1.1.)$$
6) Дистрибутивність добутку числа на суму векторів: $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
7) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$ або $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$, де $\vec{0}$- нульовий вектор.
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Властивості 1-8 справедливі для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та довільних чисел λ і μ.

Для векторів справедливі також інші властивості, зокрема:

Модуль суми двох векторів не перевищує суми їх модулів, тобто $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$, або в більш загальній формі: $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n| \le |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \cdots + |\vec{a}_n|$. Модуль різниці двох векторів не менший від абсолютної величини різниці їх модулів, тобто: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ge \left||\vec{a}| - \left|\vec{b}\right|\right|$.

1.3. Проекція вектора на вісь.

Віссю називають напрямлену пряму, додатній напрям якої позначають стрілкою. Очевидно, що напрям протилежний до заданого є від'ємним.

Відомо, що проекцією точки на вісь є основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на цю вісь. На рис.6 проекцією точки B є точка B_1. Проекцією відрізка AB на вісь є відрізок A_1B_1, кінцями якого є проекції відповідних кінців відрізка AB на вісь.

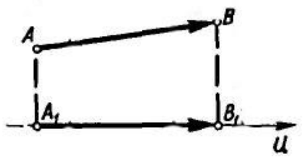


Рис. 7

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називають додатне число $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l однаково напрямлені, і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{AB}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначають так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Якщо вектор нульовий, то його проекція на вісь дорівнює нулю.

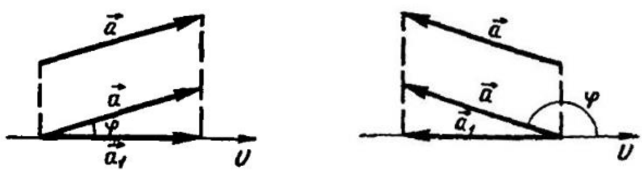


Рис. 8

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l називається менший з двох кутів, на який потрібно повернути вектор $\vec{a}$, щоб він збігався за напрямом з віссю l: $\varphi = (\vec{a},^\wedge l)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Властивості проекцій.

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором та віссю, тобто $np_l\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi$.

2. Проекція суми кількох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто $np_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}$.

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число: $np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda np_l\vec{a}$.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок. Кутом між ними називатимемо менший з двох кутів, на який потрібно повернути один вектор, щоб він збігався за напрямом з другим вектором. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо $(\vec{a},^\wedge \vec{b})$, $0 \leq (\vec{a},^\wedge \vec{b}) \leq \pi$. В деяких випадках ми будемо вказувати, від якого вектора і в якому напрямі кут відраховується.

1.4. Лінійні простори. n - вимірний векторний простір.

Множину довільної природи, для елементів якої можна ввести поняття додавання і множення елемента на число, з властивостями (1)-(8) називають лінійним простором, а її елементи – векторами. Лінійні простори позначатимемо L.

Приклади лінійних просторів:

1. Нехай L множина всіх многочленів степеня не вищого за n. Очевидно, що сума двох многочленів і результат множення многочлена на довільне дійсне число є також многочлен степеня не вищого за n. Як нульовий елемент множини L візьмемо многочлен, який тотожньо рівний нулю. Легко перевірити справедливість властивостей (1)-(8). Зробіть це самостійно.

2. Нехай L множина всіх матриць розмірності $n \times m$. Операції додавання матриць і множення матриць на число введено вище. Легко перевірити справедливість властивостей (1)-(8). Зробіть це самостійно.

3. Нехай n довільне натуральне число. Розглянемо множину R^n всіх наборів із n дійсних чисел. Кожний такий набір позначатимемо $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і називатимемо вектором. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$

називатимемо координатами вектора $\vec{a}$. Операції над елементами множини R^n визначимо таким чином: Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні відповідно $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, а λ - дійсне число, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \qquad (1.2.)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n) \qquad (1.3.)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \qquad (1.4.)$$

Визначені таким способом операції задовольняють властивостям (1)-(8). Перевірте це самостійно.

Два вектори рівні в R^n, якщо одночасно рівні всі їх відповідні координати.

Цей лінійний простір називають n-вимірним векторним простором і в подальшому він відіграватиме важливу роль.

1.5. Розклад вектора за базисом.

Вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ довільні дійсні числа називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Вважатимемо, що вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ якщо існують такі числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (коефіцієнти лінійної комбінації), що $\vec{a} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \dots + \mu_n\vec{a}_n$.

Множина векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не всі одночасно рівні нулю для яких виконується така умова:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0. \qquad (1.5.)$$

Якщо умова (1.5.) виконується тільки у випадку, коли всі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одночасно рівні нулю, то множина векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною.

Іншими словами скінченна система векторів називається лінійно залежною, якщо існує вектор системи, який є лінійною комбінацією решти векторів системи. Якщо такого вектора не існує, то система називається лінійно незалежною.

Нескінченна система векторів у лінійному просторі називається лінійно незалежною, якщо довільна її скінченна множина векторів лінійно незалежна.

Використовуючи вище наведене можна дати інше означення компланарності трьох векторів.

Означення. Три вектори називаються компланарними, якщо вони утворюють лінійно залежну систему.

Твердження 1. У просторі R^2 система векторів, в якій кількість векторів більша ніж два, лінійно залежна. У просторі R^3 система векторів, в якій кількість векторів більша ніж три, лінійно залежна. Вище наведене твердження можна узагальнити.

Твердження 2. У просторі R^n система векторів, в якій кількість векторів більша ніж n, лінійно залежна.

Означення. Сім'я векторів у лінійному просторі називається базисом, якщо вона лінійно незалежна і кожний вектор простору лінійно виражається через вектори сім'ї.

Довільний ненульовий вектор утворює базис на прямій (у просторі R^1). Довільна упорядкована пара неколінеарних векторів утворює базис на площині (у просторі R^2). Довільна упорядкована трійка некомпланарних векторів утворює базис у просторі R^3.

Твердження 3. Будь-який вектор, паралельний деякій прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій. Будь-який вектор, паралельний деякій площині, можна розкласти за базисом на цій площині. Будь-який вектор простору R^3 можна розкласти за базисом у просторі R^3.

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у просторі R^3, то довільний вектор $\vec{d}$ цього простору можна розкласти за цим базисом, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, при цьому числа α, β і γ називають координатами вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

§2. Системи координат.

2.1. Декартова система координат.

Розглянемо в просторі R^3 деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ з спільним початком в точці O (рис.9).

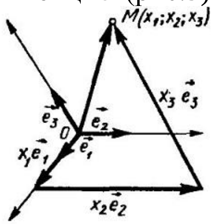


Рис. 9

Сукупність точки і базису називається декартовою системою координат в просторі R^3. Точка O називається початком координат, а осі які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються осями координат. Перша вісь (вісь абсцис) проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$, друга (вісь ординат) – в напрямі вектора $\vec{e}_2$ і третя (вісь аплікат) – в напрямі вектора $\vec{e}_3$.

Площини, які проходять через осі координат, називаються координатними площинами.

Довільній точці M простору R^3 можна співставити вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець – з точкою M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається радіус-вектором точки M відносно початку координат. Тоді існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3, що

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \qquad (2.1)$$

Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають декартовими координатами точки M в даній системі координат і записують таким чином: $M(x_1, x_2, x_3)$. При цьому координата x_1 називається абсцисою точки M, координата x_2-ординатою точки M і координата x_3 - аплікатою точки M.

Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині (в просторі R^2) та на прямій (в просторі R^1).

Таким чином, якщо в просторі R^3 обрано декартову систему координат, то кожній точці цього простору відповідає єдина упорядкована трійка дійсних чисел – декартові координати цієї точки. Для довільної упорядкованої трійки чисел існує єдина точка простору R^3, декартові координати якої задаються цими числами. Це означає, що в довільній декартовій системі координат існує взаємно однозначна відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Декартова система координат на площині визначає взаємно однозначну відповідність між точками площини і упорядкованими парами чисел, а на прямій – між точками прямої і дійсними числами.

2.2. Прямокутна система координат.

Найчастіше застосовують на практиці окремий випадок декартової системи координат – прямокутна систему координат. Для її визначення введемо такі поняття.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних (перпендикулярних) векторів називається ортонормованим базисом в просторі R^3. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad (\vec{i},\wedge \vec{j}) = (\vec{j},\wedge \vec{k}) = (\vec{k},\wedge \vec{i}) = \frac{\pi}{2}.$$

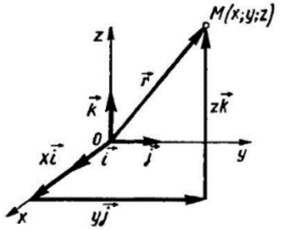


Рис. 10

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з спільним початком називається правою якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. Якщо ж вказаний поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається лівою.

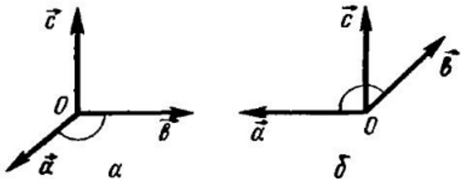


Рис. 11

Прямокутною системою координат називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається правою (лівою), якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. В подальшому будемо користуватись правою системою координат.

Прямокутну систему координат (рис. 12) позначають через $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат). Координатні площини позначають через Oxy, Oyz, Ozx. Вони ділять простір R^3 на вісім октантів. При зображенні прямокутної системи координат, як правило показують лише осі координат, а вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не вказують.

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рис. 12). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки відповідно з формулою (2.1) записують у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \text{ або } \vec{r} = (x;\ y;\ z) \qquad (2.2)$$

Координати радіус-вектора точки M називаються координатами точки M. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M(x;\ y;\ z)$.

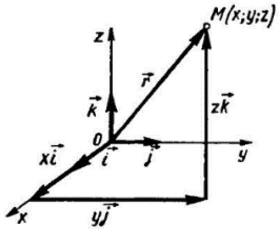


Рис. 12

Так як базисні вектори прямокутної системи координат ортогональні, то координати точки M визначаються проектуванням цієї точки на координатні осі та при цьому дорівнюють відповідним проекціям радіус-вектора точки M на осі координат, тобто

$$x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OM},\ y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OM},\ z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} \qquad (2.3)$$

Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначаються аналогічним способом.

Прямокутна система координат Oxy на площині задається точкою O і двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ - базисом системи координат. Точка $M(x;\ y)$ на площині має тільки дві координати – абсцису і ординату.

Система координат на прямій задається точкою O і одиничним вектором $\vec{\imath}$. Точка $M(x)$ на прямій має тільки одну координату.

Лекція 4.

Тема. Вектори в прямокутній системі координат. Скалярний добуток векторів. Елементи аналітичної геометрії. Пряма на площині.

§3. Вектори в прямокутній системі координат.

1.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора в просторі R^3.

1. Координати вектора. Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано деякий вектор $\vec{a}$. Тоді наша система координат задається ортонормованим базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і згідно рівності (2.2) вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z - координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. З рівності (2.3) випливає, що координати вектора в прямокутній системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат, тобто

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a},\ a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a},\ a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a} \qquad (3.1)$$

2. Довжина вектора. Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 1) з сторонами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, і тому його довжина дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3.2)$$

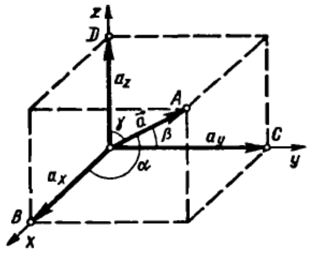


Рис. 1

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2) знаходиться в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець - в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то для того, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ потрібно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (3.3)$$

Тоді з формули (3.2) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ або іншими словами відстань між точками A і B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.4)$$

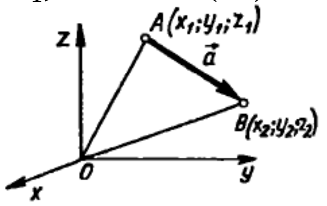


Рис. 2

3. Орт вектора. Нехай маємо деякий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тоді ортом вектора $\vec{a}$ буде вектор $\vec{a}^{\circ}$ одиничної довжини, співнапрямлений з даним вектором, тобто

$$\vec{a}^{\circ} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) \qquad (3.5)$$

4. Напрямні косинуси вектора.

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 1):

$\alpha = (\vec{a}, ^\wedge \vec{i}),\ \beta = (\vec{a}, ^\wedge \vec{j}),\ \gamma = (\vec{a}, ^\wedge \vec{k}),\ 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi.$

Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами. Формули для напрямних косинусів наступні:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (3.6)$$

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (3.6) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (3.2) дістанемо

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \qquad (3.7)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

3.2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів.

1. Дії з векторами. Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$.

2. Рівність векторів. Нехай вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді це рівносильно одночасному виконанню трьох рівностей:

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z \qquad (3.8)$$

і навпаки, якщо мають місце формули (3.8), то $\vec{a} = \vec{b}$. Отже, всяка векторна рівність виду $\vec{a} = \vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (3.8).

3. Колінеарність векторів. Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (3.9)$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тоді з формул (3.8) дістаємо рівності $a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z$, з яких випливають формули (3.9).

3.3. Поділ відрізка в даному відношенні.

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$.

Знайдемо на відрізку таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$, $\vec{r}_2 = \overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3). Оскільки $\overline{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overline{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}$$

Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (3.8) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.10)$$

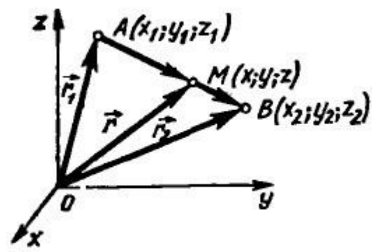


Рис. 3

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.11)$$

§4. Скалярний добуток векторів.

4.1. Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}). \qquad (4.1)$$

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то вважають, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Скалярний добуток векторів можна виразити через таке геометричне поняття, як проекція вектора на напрям (вісь) іншого вектора. Величина $|\vec{a}| cos(\vec{a},^\wedge \vec{b})$ є проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, тобто

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}| cos(\vec{a},^\wedge \vec{b})$$

$$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}).$$

Тепер можна сказати, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - це добуток довжини одного вектора на проекцію іншого, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \qquad (4.2)$$

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 4), дорівнює

$$A = |\vec{F}||\vec{S}| cos\alpha,$$

або

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \qquad (4.3)$$

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

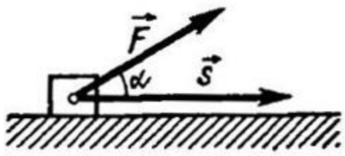


Рис. 4

4.2.Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. Комутативна властивість множення:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2. Асоціативна властивість відносно множення на число λ:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

3. Дистрибутивна властивість відносно додавання векторів:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4.3. Геометричні властивості скалярного добутку.

1. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді, і тільки тоді, коли вони ортогональні, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

2. Скалярний добуток вектора самого на себе називається скалярним квадратом і дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \text{ тоді } |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо $0\le\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)<\frac{\pi}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо $\frac{\pi}{2}<\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)\le\pi$.

4. Якщо відомі скалярний добуток двох векторів та їх довжини, то завжди можна знайти косинус кута між ними (і сам кут)

$$cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad \left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=arccos\,\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

З означення скалярного добутку, враховуючи, що $\left|cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)\right|\le 1$, випливає нерівність $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$.

Приклади.

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{n}=4\vec{a}+5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

   Розв'язання. $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a}+5\vec{b}\right)=8\vec{a}^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-12\vec{b}\cdot\vec{a}-15\vec{b}^2=$

   $$=8|\vec{a}|^2\ -2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)-15\left|\vec{b}\right|^2$$

   Підставляючи відповідні значення отримаємо:

   $$\vec{m}\cdot\vec{n}=8\cdot 1^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-15\cdot 2^2=-54.$$

2. Знайти довжину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$.

   Розв'язання. За формулою $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ маємо:

   $$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^2}=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}.$$

4.4. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.

Нехай задано два вектори $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Тоді їхній скалярний добуток рівний:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (4.4)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (4.4).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ є рівність

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \qquad (4.5)$$

2. Довжина вектора $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \qquad (4.6)$$

3. Кут $\varphi=\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$ між векторами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (4.7)$$

Приклад. Обчислити яку роботу виконує сила $\vec{F} = (2, -1, 4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M = (-1, 0, 3)$ в точку $N = (2, -3, 5)$.
Розв'язання. Знайдемо спочатку вектор переміщення $\vec{S} = \overline{MN} = (2-(-1), -3-0, 5-3) = (3, -3, 2)$.
Тоді за формулами (4.3) і (4.4) робота $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) + 4\cdot 2 = 6 + 3 + 8 = 17$.

Тема. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

§ 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ. ПОВЕРХНЯ ТА ЇЇ РІВНЯННЯ.

1.1. Поняття про лінію та її рівняння.

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \qquad (1.1)$$

яка зв'язує змінні величини x та y.

Рівняння (1.1) називається рівнянням лінії l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Ми вивчатимемо лише лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються рівняннями

$$ax + by + c = 0 \text{ та } ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

1.2. Параметричні рівняння лінії.

Нехай залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t). \qquad (1.2)$$

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається параметричним, а рівняння (1.2) — параметричними рівняннями лінії l.

Приклади.

1. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі Ox котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається циклоїдою (рис. 5) і задається рівнянням

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t); \quad -\infty < t < +\infty.$$

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ — то другу арку і т. д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, які описує на нерухомій площині точка однієї лінії, що котиться без ковзання по другій лінії.

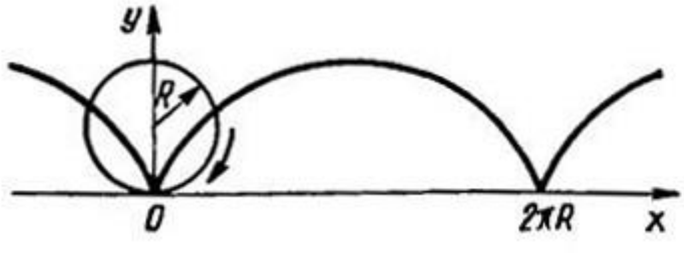


Рис. 5

2. Кардіоїда задається параметричними рівняннями

$$x = 2R\cos t\,(1 + \cos t), \quad y = 2R\sin t\,(1 + \cos t); \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Простіше записується полярне рівняння кардіоїди:

$$\rho = 2R\,(1 + \cos\varphi).$$

Усі ці криві широко застосовуються в теорії механізмів.

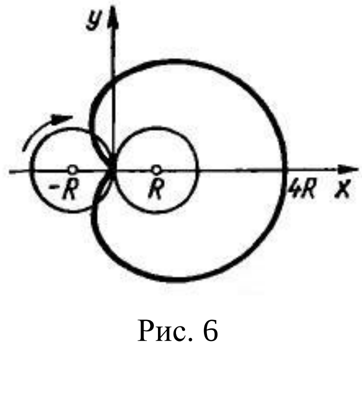


Рис. 6

1.3. Векторне рівняння лінії.

Лінію можна задати також векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, площини.

Векторному параметричному рівнянню $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

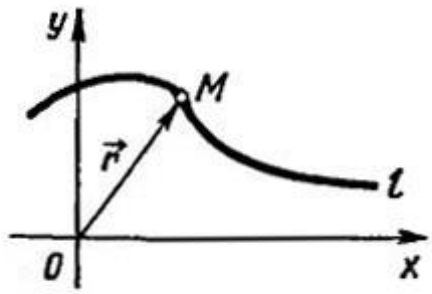


Рис. 7

1.4. Поверхня та її рівняння.

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1.3)$$

між трьома змінними величинами x, y, z.

Отже, рівняння (1.3) називається рівнянням поверхні відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

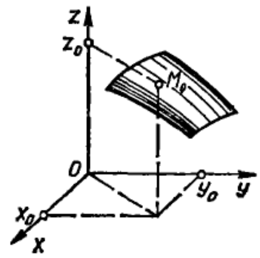


Рис. 8

§ 2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.

2.1. Різні види рівнянь прямої на площині.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

1. Векторне параметричне рівняння прямої. Нехай пряма (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис. 9) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори

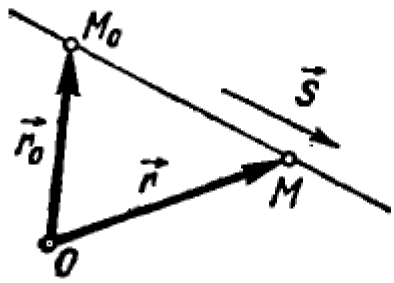


Рис. 9

$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}_0$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t. \qquad (1.4)$$

Змінна t у формулі (1.4) може набувати довільних дійсних значень і називається параметром, а рівняння (1.4) називається *векторним параметричним рівнянням прямої*.

Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд і на площині, і в просторі.

Лекція 5.

Тема. Пряма на площині. Площина в просторі. Пряма в просторі.

2. Параметричне та канонічне рівняння прямої.

Якщо пряма l розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0;\ y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m;n)$, то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0+\vec{s}t$ за формулою (1.4), маємо

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt. \qquad (1.5)$$

Звідки, виражаючи параметр t з обох частин формул (1.5) і прирівнюючи їх, отримаємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (1.6)$$

Рівняння (1.5) називаються параметричними рівняннями прямої, а рівняння (1.6) — її канонічним рівнянням.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s}=(m;0)$, тому рівняння (1.6) набирає вигляду

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y-y_0)\cdot m=(x-x_0)\cdot 0$, звідки $y=y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox.

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно осі Oy, то її рівнянням є $x=x_0$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1.7)$$

Рівняння (12) називається рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

4. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Якщо пряма проходить через точки $A(a;0)$ та $B(0;b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 11), то з рівняння (1.7) маємо

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1.8)$$

Рівняння (1.8) називається рівнянням прямої у відрізках на осях.

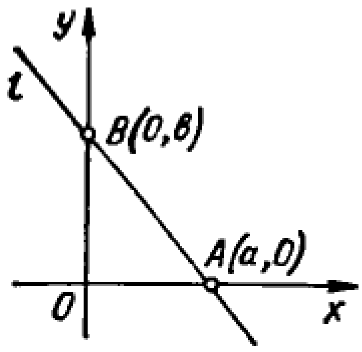


Рис. 10

5. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого ненульового вектора.

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n}=(A;B)$.

Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 11) $M(x;y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0\ . \qquad (1.9)$$

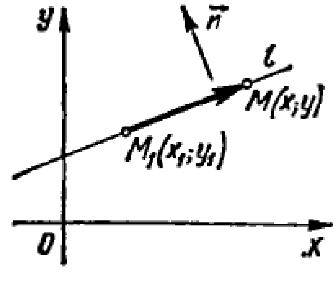


Рис. 11

Рівняння (1.9) називається рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Вектор $\vec{n}=(A;B)$ називається нормальним вектором прямої. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

6. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

Розкриємо дужки в рівнянні (1.9), в результаті отримаємо рівняння

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0.$$

Якщо ми позначимо в ньому через C вираз $C = -Ax_1 - By_1$, то отримаємо загальне рівняння прямої на площині.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.10)$$

Коефіцієнти A і B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат Oxy залежно від значень коефіцієнтів A, B і C.

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (1.10) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$,

тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ і $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої.

3. Аналогічно попередньому, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої.

5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox.

6. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy.

7. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо в рівнянні (1.10) $B \neq 0$, то знайдемо з нього y. Тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, і якщо ми введемо позначення $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b\,. \qquad (1.11)$$

Значення $k = tg\,\alpha$, де α — кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 1), називається кутовим коефіцієнтом прямої, а величина b — ордината точки перетину прямої з віссю Oy. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд

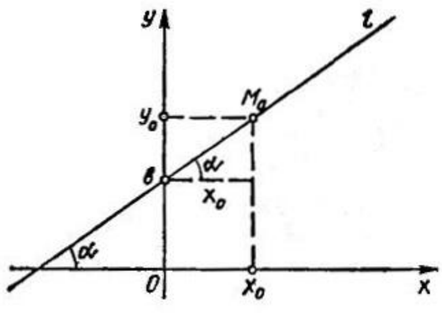


Рис. 1

$$y = kx \qquad (1.12)$$

Пряма, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k, задається рівнянням:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.13)$$

2.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}\quad;\ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi = \left(l_1,^\wedge l_2\right)$, $0 < \varphi < \pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 2) і $\varphi = \left(\vec{s}_1,^\wedge \vec{s}_2\right)$, то за формулою (4.7) (див. лекцію 4) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}} \qquad (1.14)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (1.15)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (1.16)$$

— умова перпендикулярності двох прямих.

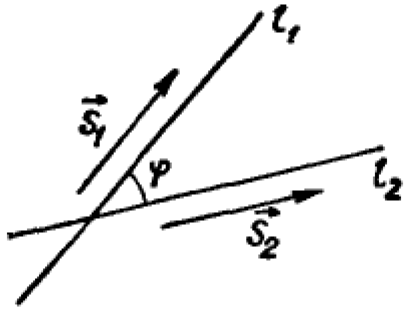


Рис. 2

б) Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними (рис. 3.) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно випадку а) дістанемо:

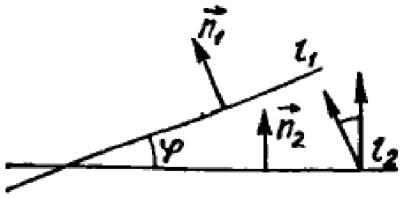


Рис. 3

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\ ; \qquad (1.17)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad (1.18)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (1.19)$$

в) Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = tg\ \alpha_1$, $k_2 = tg\ \alpha_2$ — кутові коефіцієнти, то з рис. 4 видно, що

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1\ tg\ \alpha_2}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (1.20)$$

Зауважимо, що формула (1.20) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, тому з формули (1.20) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2 \qquad (1.21)$$

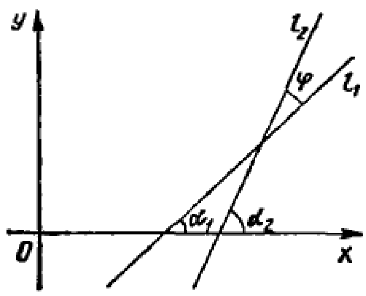


Рис. 4

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $tg\varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (1.20) дорівнює нулю. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (1.22)$$

Формули (1.14), (1.17) і (1.20) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

Приклади.

1. Знайти кут між прямими $4x + 3y - 7 = 0$ і $12x - 5y + 9 = 0$.

Розв'язання. Прямі задані своїми загальними рівняннями. Тому відомі їх вектори нормалі $\vec{n}_1 = (4; 3)$ і $\vec{n}_2 = (12; -5)$. Тоді за формулою (1.17) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{4\cdot 12 + 3\cdot(-5)}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{48-15}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \frac{33}{5\cdot 13} = \frac{33}{65},$$

$$\varphi = arccos\frac{33}{65}.$$

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-5; 3)$ паралельно прямій $4x - y - 15 = 0$.

Розв'язання. Приведемо задане рівняння до вигляду (1.11): $y = 4x - 15$, отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 4$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (1,21) їхні кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням (1.13). дістанемо $y - 3 = 4(x + 5)$ або $y = 4x + 23$ або $4x - y + 23 = 0$.

2.3. Відстань від точки до прямої.

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0(x_0;\ y_0)$. Відстань d (рис. 5) від точки M_0 до прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1;\ y_1)$ —довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$. Отже,

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Оскільки $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $-Ax_1 - By_1 = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1.23)$$

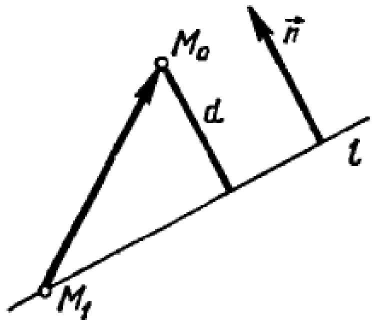


Рис. 5

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(2;\ -7)$ до прямої $4x - 5y + 8 = 0$.
Розв'язання.

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4\cdot2-5\cdot(-7)+8|}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} = \frac{|8+35+8|}{\sqrt{16+25}} = \frac{51}{\sqrt{41}} \text{ (лін. од.)}$$

§ 3. Площина в просторі.
3.1. Загальне рівняння площини та його дослідження.

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину Π (рис. 6) точкою $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$. При будь-якому положенні точки M на площині Π вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\ . \qquad (3.1)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3.2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (3.1) називається рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, а рівняння (3.2) — загальним рівнянням площини.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ називається нормальним вектором площини. Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а їхні координати пропорційні. Отже, всяка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня.

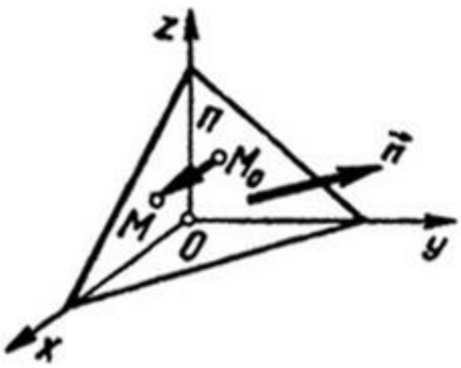


Рис. 6

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівнянні (3.2) $D = 0$, то воно має вигляд $Ax + By + Cz = 0$ Це рівняння задовольняє точка $O = (0; 0; 0)$. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A = 0$, то рівняння (3.2) має вигляд $By + Cz + D = 0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox. Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну осі Oy, а рівняння $Ax + By + D = 0$ — площину, паралельну Oz.

3. Якщо $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, то рівняння (3.2) має вигляд $Cz + D = 0$ або $z = -\frac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox та Oy (коефіцієнти при x і y дорівнюють 0), тобто площину, паралельну площині Oxy.

Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна площині Oxz, а площина $Ax + D = 0$ паралельна площині Oyz.

4. Якщо в рівнянні (3.2) $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, при $D = 0$ площина проходить через початок координат, а при $A = 0$ — паралельно осі Ox, отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $Ax + By = 0$ — через вісь Oz.

5. Якщо в рівнянні площини $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $Ax = 0$ або $x = 0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y = 0$ — з площиною Oxz.

Приклади.

I. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;\ -3;\ 4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (5; -2;\ 7)$,

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (3.1):

$$5 \cdot (x - 2) + (-2) \cdot \big(y - (-3)\big) + 7 \cdot (z - 4) = 0,$$

або

$$5x - 2y + 7z - 32 = 0.$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;\ -5;\ 2)$ перпендикулярно до осі Oz.

Розв'язання. Орт $\vec{k} = (0; 0;\ 1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд

$0 \cdot (x - 3) + 0 \cdot \big(y - (-5)\big) + 1 \cdot (z - 2) = 0$ або $z = 2$.

3.2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай на площині Π задано три точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ і запишемо рівняння шуканої прямої:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.3)$$

Маємо рівняння площини, що проходить через три точки.

Зокрема, нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу (3.3) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$xbc + yac + zab - abc = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \qquad (3.4)$$

Рівняння (3.4) називається рівнянням площини у відрізках на осях. Ним зручно користуватись при побудові площини.

Приклади.

1. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;\ -3;\ 1)$, $M_2(4;\ -1;\ 5)$, $M_3(1;\ 4;\ -1)$.

Розв'язання. Підставимо координата точок у рівняння (3.3):

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - (-3) & z - 1 \\ 4 - 2 & -1 - (-3) & 5 - 1 \\ 1 - 2 & 4 - (-3) & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 7 & -2\end{vmatrix}-(y+3)\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 7\end{vmatrix}=0$$

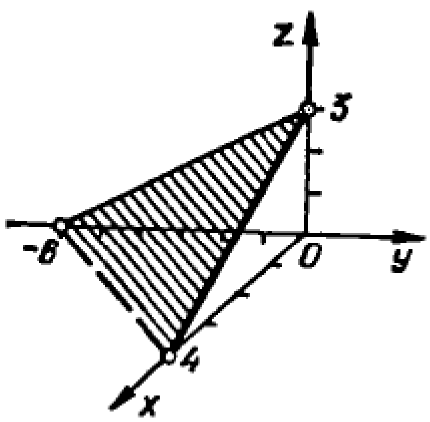


Рис. 7.

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:
$(x-2)\cdot(-4-28)-(y+3)\cdot(-4+4)+(z-1)\cdot(14+2)=0$ або $(x-2)\cdot(-32)-(y+3)\cdot 0+(z-1)\cdot 16=0$ або $2(x-2)-(z-1)=0$ або $2x-z-3=0$.

2. Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1,$$

Звідкн $a=4$, $b=-6$, $c=3$.

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рнс. 7).

3.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.

Нехай задано дві площини Π_1 і Π_2 відповідно рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ цих площин (рис. 8). Отже, з формули (4.7) (див. лекцію 4) маємо

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.5)$$

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (3.6)$$

є умовою перпендикулярності площин.

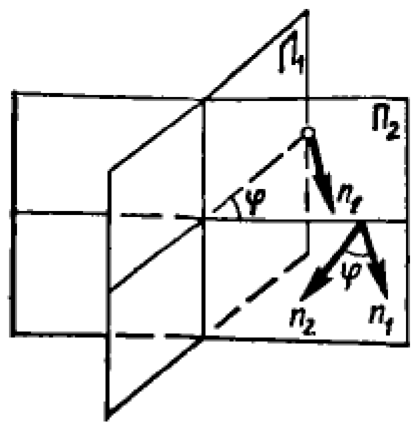


Рис. 8.

Якщо площини Π_1 і Π_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.7)$$

Приклад. Знайти кут між площинами $3x-y+4z-2=0$ і $5x+7y-2z+9=0$.

Розв'язання. За формулою (3,5) маємо

$$cos\,\varphi=\frac{3\cdot 5+(-1)\cdot 7+4\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}\,\sqrt{5^2+7^2+(-2)^2}}=0,$$

отже, дані площини перпендикулярні.

3.4. Відстань від точки до площини.

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини Π і точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.8)$$

Доведення формули (3.8) таке саме, як і формули (1.23).

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(3;5;\ -6)$ до площини $2x-4y+3z-5=0$.

Розв'язання. За формулою (3.8) знаходимо шукану відстань

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 3-4\cdot 5+3\cdot(-6)-5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{|6-20-18-5|}{\sqrt{4+16+9}}=\frac{37}{\sqrt{29}}$$ (лін. од.)

Лекція 6.

Тема. Пряма в просторі. Функція. Границя функції.

§ 4. Пряма в просторі.

4.1. Різні види рівнянь прямої в просторі.

Як уже зазначалося в § 2, коли пряма задана точкою і напрямним вектором, то її векторне параметричне рівняння (як на площині так і в просторі) має вигляд (1.4): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}$— радіус-вектор змінної точки M прямої; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор заданої точки M_0; $\vec{s}$ — ненульовий напрямний вектор прямої; t — параметр.

Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ цієї прямої (рис. 9). Тоді аналогічно тому, як було знайдено формули (1.5) — (1.7), дістаємо:

1) параметричні рівняння прямої в просторі:

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt; \qquad (4.1)$$

2) канонічні рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}; \qquad (4.2)$$

3) рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.3)$$

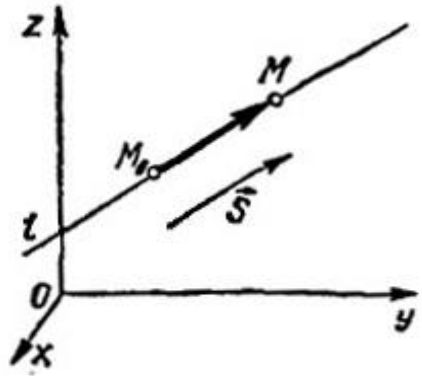


Рис. 9.

У рівняннях (4.1) — (4.3) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq \vec{0}$).

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox. Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m = n = 0,\ p \neq 0$, або $m = p = 0,\ n \neq 0$, або $n = p = 0,\ m \neq 0$, то рівняння (4.2) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad (4.4)$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (4.4) називаються загальними рівняннями прямої в просторі.

4.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad ; \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими (рис. 11) дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тому аналогічно з випадком а) п. 2.2 дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\ |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}; \qquad (4.6)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad (4.7)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (4.8)$$

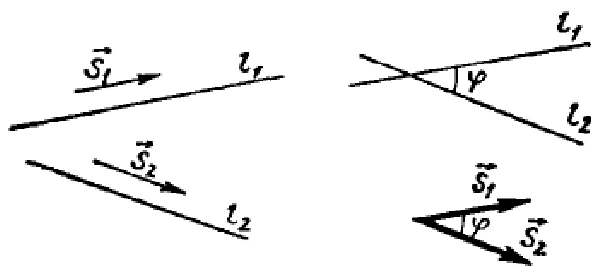


Рис. 11.

Приклад. Знайти кут φ між прямими $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-2}$ і $\frac{x+5}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$.

Розв'язання. Прямі задані своїми канонічними рівняннями. Тому відомі їх напрямні вектори $\vec{s}_1 = (1; 2; -2)$ і $\vec{s}_2 = (1; 0; -1)$. Тоді за формулою (4.6) маємо

$$cos\ \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\ |\vec{s}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}\ \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1 + 0 + 2}{\sqrt{9}\ \sqrt{2}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

або

$$\varphi = arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^{\circ}.$$

4.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Кут між прямою l і площиною *П* за означенням є кут між прямою l і її проекцією на площину *П*.

Нехай площина *П* і пряма l задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 12) і її проекцією l_1 на площину *П* через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ площини *П* і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$ прямої l — через θ. Якщо $\theta \leq 90^{\circ}$, то $\varphi = 90^{\circ} - \theta$, тому $sin\ \varphi = cos\theta$; якщо ж $\theta > 90^{\circ}$, то $\varphi = \theta - 90^{\circ}$ і $sin\ \varphi = -cos\theta$. Отже, в будь-якому випадку $sin\ \varphi = |cos\theta|$. Але

$$cos\ \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}|\ |\vec{s}|},$$

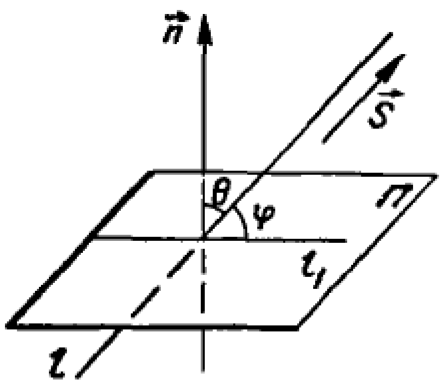


Рис. 12.

тому кут між прямою і площиною знаходиться за формулою

$$sin\ \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}|\ |\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (4.9)$$

Якщо пряма l паралельна площині *П*, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (4.10)$$

— умова паралельності прямої і площини.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини *П*, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4.11)$$

є умовою перпендикулярності прямої і площини.

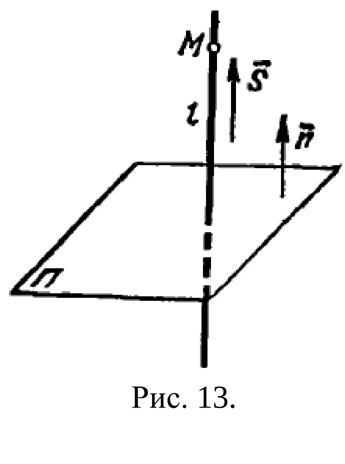


Рис. 13.

На самостійне вивчення пропонуються наступні теми:

1. **Лінії другого порядку. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.**
2. **Поверхні другого порядку.**

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз — це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи дано у працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17—18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

§1. Функції.

1.1. Множини.

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці.

Означення. Множиною називають сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, характеристикою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір'я, множина розв'язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи — малими. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$.

Запис $x \notin X$ означає, що елемент х не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 9, але не належить число 0,9.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається скінченною. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ означає, що множина A скінченна і містить s елементів. Множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається нескінченною. Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло, — нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$.

Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Нехай задано дві множини A і B. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ («A міститься в B» або «B містить A»), Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$ то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$.

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Множину C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B, називають *об'єднанням (сумою) множин* A та B і позначають $C = A \cup B$ (рис. 1, а).

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B, називають *перерізом (добутком) множин* A та B і позначають $D = A \cap B$ (рис. 1, б).

Множину E, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B, називають різницею множин A та B і позначають $E = A \backslash B$ (рис. 1, в).

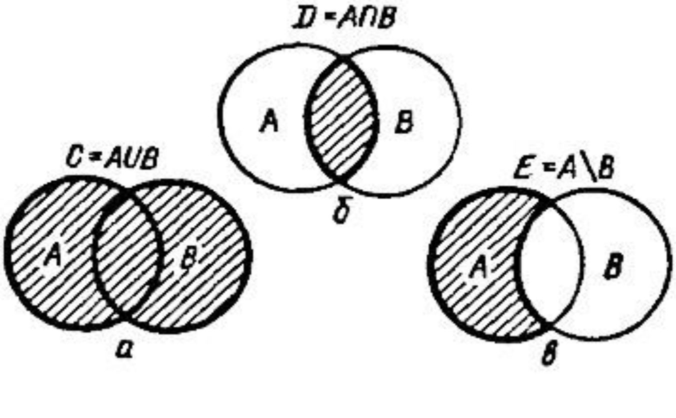


Рис 1.

Квантори.

Загальноприйняті в математиці символи і позначення називають кванторами:

$\Leftrightarrow$ − рівносильно,

$\Rightarrow$ − слідує,

$\exists$ − існує,

$\exists!$ − існує єдиний, єдина, єдине (в залежності від контексту),

$\forall$ − будь-який, довільний, всякий.

1.2. Сталі та змінні величини.

Величина — одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об'єм, дійсне число, вектор — все це приклади величин.

На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад, довжина в метрах, маса — в грамах і т. д.), характеризується своїм числовим значенням.

Згодом величинами стали і такі поняття, як число, вектор та інші. Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається змінною, у другому — сталою.

Приклади.

1. Відношення довжини кола до його діаметра є величина стала для всіх кіл і дорівнює числу π.
2. Величина *x,* яка задовольняє умову $x \in [0; 1]$, є змінною величиною.
3. Якщо в різних місцях і на різних глибинах озера вимірювати одночасно тиск води і її густину, то виявиться, що тиск — змінна величина, а густину можна вважати величиною сталою.

У перших двох прикладах стала і змінна величини визначаються точно. У третьому випадку густина води, хоч і незначно, але змінюється, тому вона є сталою тільки з певною точністю. В багатьох реальних явищах можна вказати величини, які лише умовно будуть сталими.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала — це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю*. Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають змінною.

1.3. Означення функції.

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом f поставлене у відповідність єдине число y з деякої числової множини Y, то кажуть, що задана функція $f: X \to Y$ або $y = f(x),\ x \in X$.

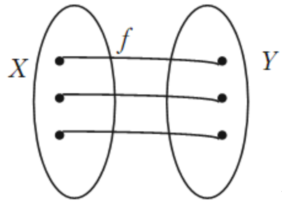


Рис 2.

Змінна x називається *незалежною змінною,* або *аргументом,* а змінна y — *залежною змінною,* або *функцією;* під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається *областю визначення функції.* Множина Y усіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень функції.*

1.4. Способи задання функцій.

Основні способи задання функції:

1. Аналітичний;
2. Графічний;
3. Табличний.

При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При графічному способі функція задається своїм графіком, тобто множиною точок площини з координатами $(x; f(x))$.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певні функції, які характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

1.5. Класифікація елементарних функцій.

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. *Степенева функція* $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α.

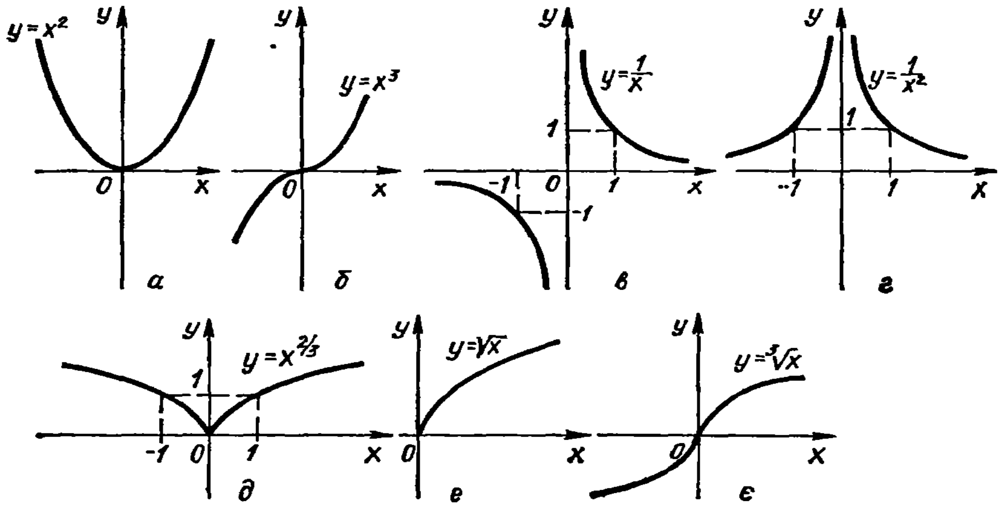


Рис 3.

2. *Показникова функція* $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

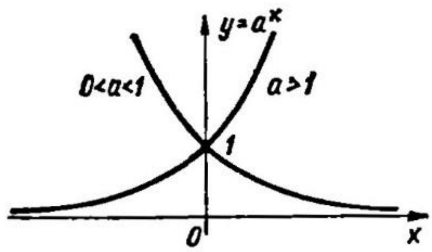


Рис 4.

4. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x\ ,\ a > 0,\ a \neq 1$.

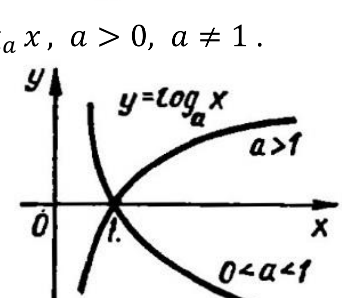


Рис 5.

5. *Тригонометричні функції*: $y = sin\, x, y = cos\, x, y = tg\, x, y = ctg\, x$.

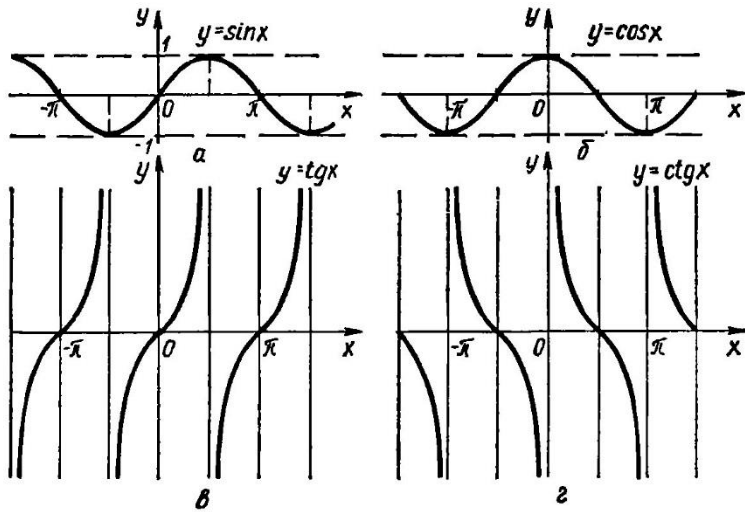


Рис 6.

5. *Обернені тригонометричні функції*: $y = arcsin\,x$, $y = arccos\,x$, $y = arctg\,x$, $y = arcctg\,x$.

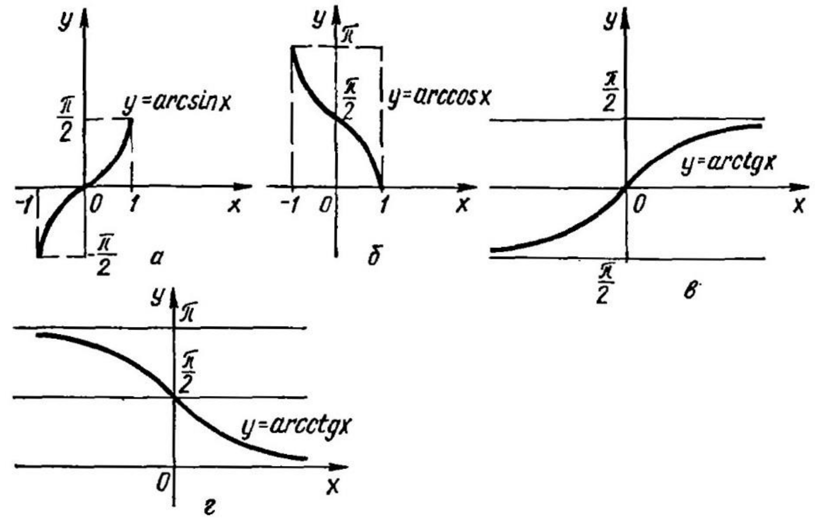


Рис 7.

1.6. Складена функція (суперпозиція функцій).

Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції,* або *накладання.* Нехай функція $z = g(y)$ визначена на множині Y, а функція $y = f(x)$— на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $y = f(x) \in Y$. Тоді на множині X визначена функція $g\big(f(x)\big)$, яку називають *складеною функцією* від x, або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції.*

Змінну $y = f(x)$ функції $z = g(y)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $z = g(y)$ зовнішньою функцією.

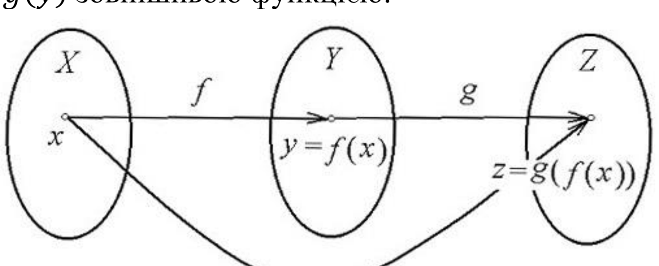


Рис 8.

Приклади.

1. Функція $y = \sqrt[5]{cos\,x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій— степеневої $y = \sqrt[5]{u}$, $u \in [-1; 1]$ та тригонометричної $u = \cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

2. Функцію $y = 3^{sin\,x^7}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:
$y = 3^u$, $u \in [-1; 1]$, $u = \sin v$, $v \in (-\infty; +\infty)$, $v = x^7$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними.*

Приклад.

$$y = \sqrt[9]{\frac{2^{arctg2x} - 7\sin\log_4\left(3x^2 - 5x + 4\right)}{6 + \left(tg\left(9x + \ln x\right) - 8\cos x\right)^3}}$$

1.7. Обмежені функції.

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на множині A, називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

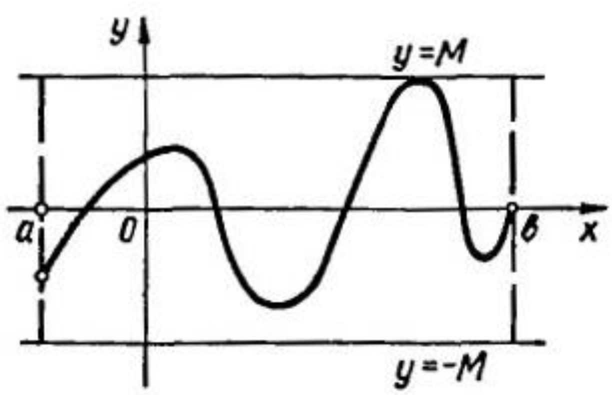
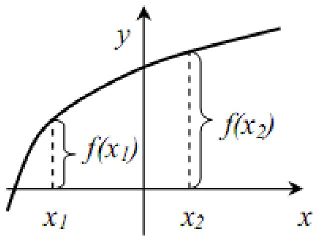


Рис 9.

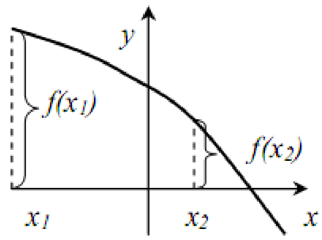
1.8. Монотонні функції.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

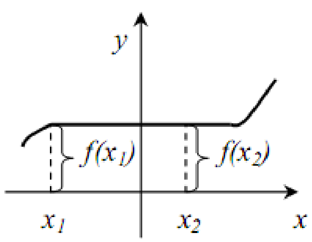
а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою;
б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається спадною;
в) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається неспадною;
г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається незростаючою.



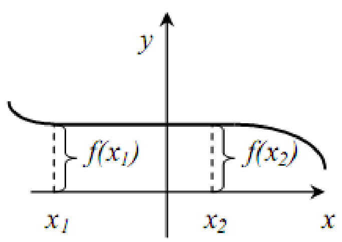
а) зростаюча



б) спадна



в) неспадна



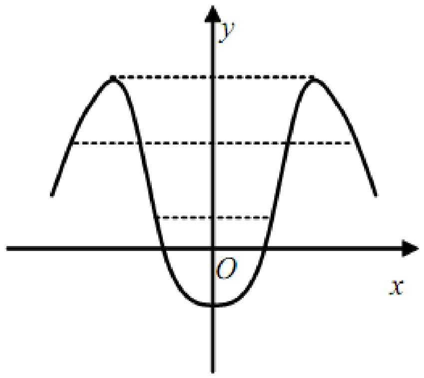
г) незростаюча

Рис 10.

1.9. Парні і непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox, розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.



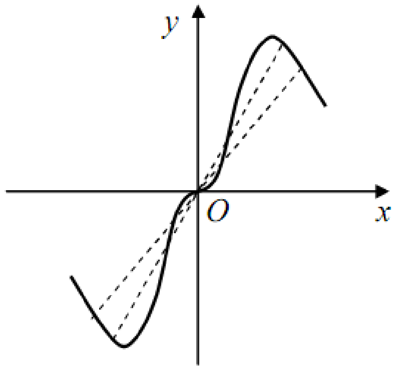


Рис 11.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат; графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають функцією загального вигляду.

1.10. Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T, $f(x+T) = f(x)$. Число T називається періодом функції. Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ і $f(x+T) = f(x)$, $x \in X$.

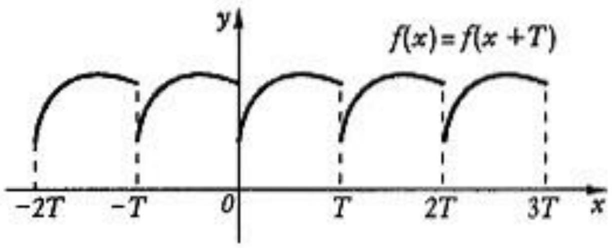


Рис 12.

1.11. Неявно задані функції.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції y вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $cos\, y - y^2 sin\, x + xy = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають неявною.

1.12. Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. 13). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1, і x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 (рис. 14). Додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція називається оберненою функцією до даної.

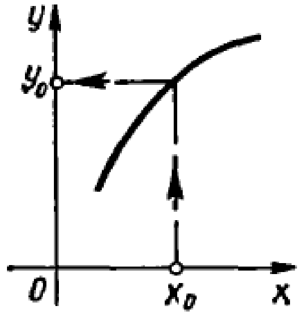


Рис 13.

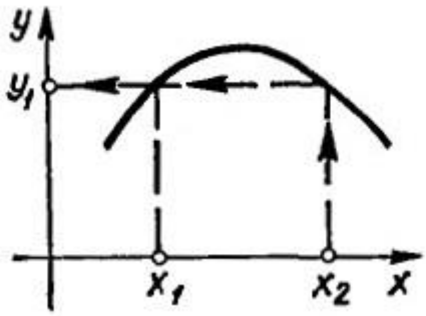


Рис 14.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:
1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

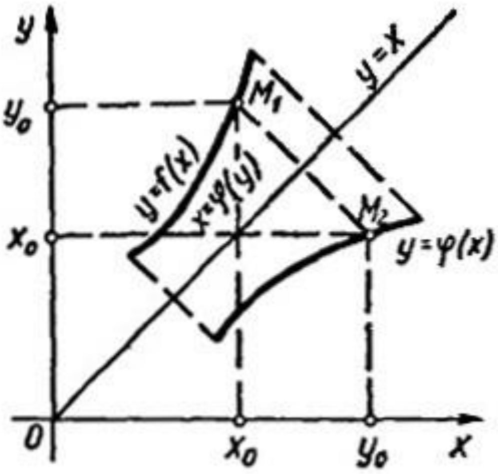


Рис 15.

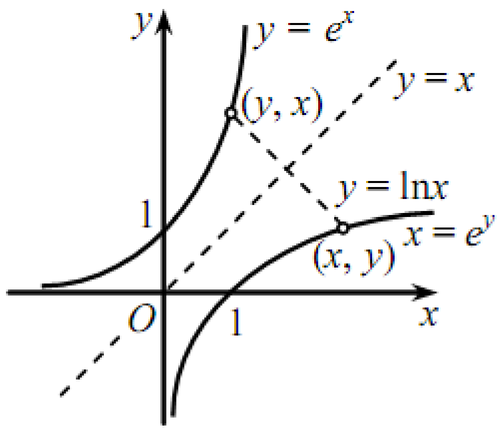


Рис 16.

§ 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ.

2.1. Числова послідовність.

Означення. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, \ x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають *числовою послідовністю* (або коротко *послідовністю)* і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, \ x_2, \dots, x_n, \dots$ називають членами або елементами послідовності: x_1— перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n —n-й, або загальний член послідовності.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел N, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Іншими словами послідовність – це функція натурального аргументу.

Приклади:

1. $\left\{\frac{1}{n}, \ n \geq 1\right\}$ або $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\}$.
2. $\{(-1)^n, \ n \geq 1\}$ або $\{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$.

2.2. Границя послідовності.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

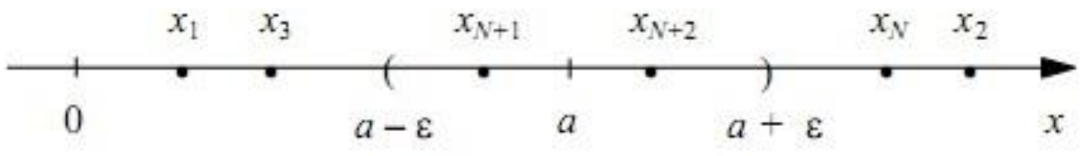


Рис 17.

Запис: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема. Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

2.3. Границя змінної величини.

Означення. Число a називається границею змінної величини x, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x-a| < \varepsilon$.

Запис: $\lim x = a$ або $x \to a$.

2.4. Нескінченно великі змінні величини.

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності.

Запис: $\lim x = \infty$ або $x \to \infty$.

Якщо змінна $x \to \infty$, то її називають нескінченно великою змінною величиною.

2.5. Властивості нескінченно великих величин.

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика.
2. Сума двох нескінченно великих величин одного знаку є нескінченно велика величина.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою.
4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

2.6. Границя функції у точці.

Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$, при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$, визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Гейне. *Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$, має границю, яка дорівнює числу A.*

Запис: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x досить близьких до точки x_0 відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від точки A.

З цим пов'язане друге означення границі. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Коші. Число A називається границею функції в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки A знайдеться δ-окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки A (рис. 18).

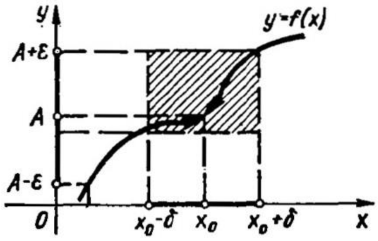


Рис 18.

2.7. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$

2.8. Властивості нескінченно малих величин.

1. Для того щоб число А було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин в величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

2.9. Односторонні границі.

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. *Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\,x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Означення. *Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\,x_0;\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.*

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B\,.$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0) = A$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(+0) = B\,.$$

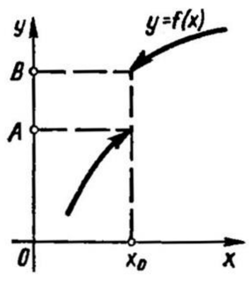


Рис. 19.

Вища математика.

Лекція 7

Тема: Границя функції.

2.10. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

Дана теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $c \in R$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = {x_0}^n$.

Приклад. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(4x^2-5x+8)$.

Розв’язання. Оскільки функція $f(x) = 4x^2-5x+8$ $\big(D(f) = (-\infty, +\infty)\big)$ є елементарною, то підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 3, одержимо

$\lim\limits_{x\to 3}(4x^2-5x+8) = 4\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 8 = 36-15+8 = 29.$

§3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ.

1.1. Важливі границі.

3.1.1. Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність$\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 9x}{9x}=9\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9.$$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{x}{tg3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3tg3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

3. Знайти границю функції:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність$\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю. Для цього використаємо формулу: $1-cos\alpha=2sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=$$

$$=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

3.1.2. Друга важлива границя:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-5-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}\cdot\frac{-9}{3x+5}(2-7x)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5}} = e^{21}$$

Окремо знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{63-\frac{18}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{63-0}{3+0} = 21$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}}$.

Розв’язання. Дана границя має невизначеність виду 1^{∞} і обчислюється з використанням формули $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Для цього нам потрібно у прикладі перейти від границі при $x\to 3$ до границі при $x\to 0$, що можна зробити здійснивши заміну $y = x-3$:

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}} = \left|\begin{matrix} y = x-3, \\ x = y+3 \end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\big(7-2(y+3)\big)^{\frac{5(y+3)}{3-(y+3)}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(7-2y-6)^{\frac{5y+15}{3-y-3}} = \lim_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{5y+15}{-y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{5y+15}{-y}} = \lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}\cdot(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} =$$

$$= \left[\lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}} = e^{2\lim\limits_{y\to 0}(5y+15)} =$$

$$= e^{2(5\cdot 0+15)} = e^{30} .$$

3.1.3. Розкриття деяких невизначеностей.

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ зводиться до підстановки у функцію $\boldsymbol{f(x)}$ граничного значення аргументу $\boldsymbol{x_0}$. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;

2) різниця двох нескінченно великих величин—невизначеність виду $\infty-\infty$;

3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику —невизначеність виду $0\cdot\infty$;

4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\frac{0}{0}$;

5) якщо $\alpha_1(x)\to 0$ та $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз ${\alpha_1}^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0;

6) якщо $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз β^{α} — невизначеність виду ∞^0;

7) якщо $f(x)\to 1$, $\beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз f^{β} — невизначеність виду 1^{∞} (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^{β}, де $f\to 1$, $\beta\to\infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+8}{7x^3+3x-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і значенник дробу на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2+8}{9x^3+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{9x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{9+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{6-0+0}{9+0-0}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду$\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$

Розв'язання. Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\frac{3}{2}$.

Тому за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$:

$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x+3)$.

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та представимо $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot 1+3}{1+6}=\frac{5}{7}.$$

Це загальний прийом. Скорочення на $x-1$ тут можливе, тому що при визначенні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ значення $x\neq x_0$.

Множник $x-x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають критичним множником.

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\frac{0}{0}$, $x-3$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{3+3}{\sqrt{3^2+7}+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

2. Невизначеності виду $\infty-\infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x}-3x\right)$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+8x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$

Вища математика.

Лекція 8.

Тема: Розкриття деяких невизначеностей. Порівняння нескінченно малих функцій. Неперервність функції. Похідна.

4. Невизначеності виду $\infty - \infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x}-3x\right)$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+8x}+3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+x-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$

3.2. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0,\quad A\in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k-го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k}=A\neq 0,\quad A\in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x\to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0. Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ та при $x\to x_0\pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади.

1. Функції $\alpha_1(x)=x$, $\alpha_2(x)=tg\ 7x$ нескінченно малі одного порядку при $x\to 0$, тому що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg\ 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7tg\ 7x}=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg\ 7x}=\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{7}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^3$ при $x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \sin x$, тому що

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \sin x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^3$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються еквівалентними нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Теорема 2. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$\sin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$
$tg\, \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$	$a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a, \quad \alpha \to 0;$
$\arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$	$\log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e, \quad \alpha \to 0;$
$arctg\, \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$
$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \to 0;$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \quad \alpha \to 0, \ k > 0.$

Зазначимо, що ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопіталя, яке ми вивчимо в подальшому курсі вищої математики.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Приклади. 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, 9x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $tg\, 9x \sim 9x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, 9x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{3x} = \frac{9}{3} = 3\,.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10}$.

Розв'язання. Оскільки $arctg\,(x-5) \sim x-5$ при $x \to 5$ та $x^2 - 7x + 10 = (x-5)\,(x-2)$, то

$$\lim_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)\,(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

4.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.1)$$

Рис. 3.

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A.

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim_{x \to x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (4.1).

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x»):

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \text{або} \qquad x = x_0 + \Delta x.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається приростом функції в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

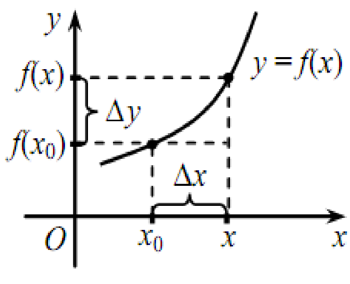


Рис. 4.

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (4.1) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x \to x_0$ і $x - x_0 \to 0$ однакові, то рівність (4.1) набуває вигляду

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0. \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (4.2)$$

Рівність (4.2) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності.

Означення. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon;\ x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці x_0 справа.*

Використовуючи ці поняття, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (4.3)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву функції.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають розривом першого роду, точку x_0 — точкою розриву першого роду.

Зокрема , якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають усувним, а точку x_0 — точкою усувного розриву. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0.

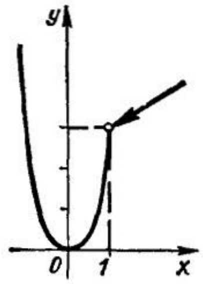


Рис. 5.

Якщо $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називають неусувним, а точку x_0 — точкою неусувного розриву. Величину $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають стрибком функції.

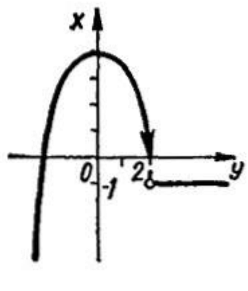


Рис. 6.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (4.3) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду, а сама точка x_0 — точкою розриву другого роду.

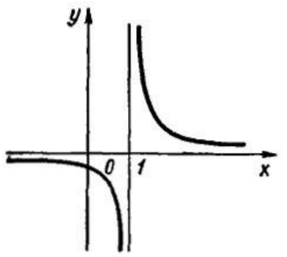


Рис. 7.

4.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\,g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (4.4)$$

(остання за умови, що $g(x) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Теорема 3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Означення. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Означення. Функція називається неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a;b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них.

Теорема 1. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює, нулю: $f(c) = 0,\ a < c < b$.

Геометричний зміст цієї теореми такий (рис. 8): неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

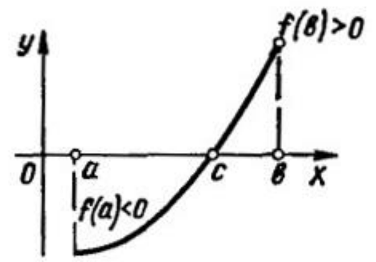


Рис. 8.

Теорема 2 (друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває, на його кінцях різних значень: $f(a) = A, f(b) = B, A \neq B$. Тоді для довільного числа $\mu \in (A;B)$ знайдеться таке число $c \in (a;b)$, що $f(c) = \mu$.

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до другого набуває також всіх проміжних значень.

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 9.

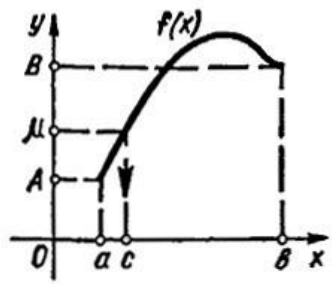


Рис. 9.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Отже, неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ (рис. 10).

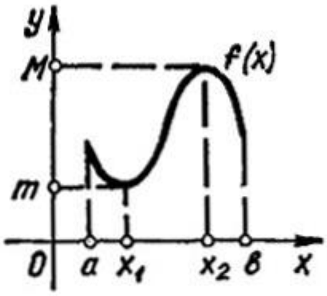


Рис. 10.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

§1. Похідна.

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому інтервалі $(a;b)$ задано функцію $y=f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x\in(a;b)$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала інтервалу $(a;b)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

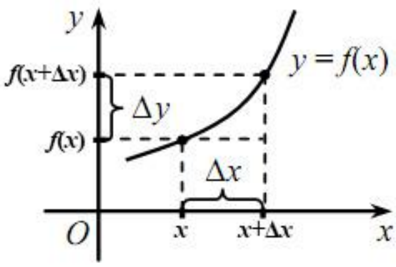


Рис. 1.

1.1. Означення похідної.

Означення. Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, якщо ця границя існує.

Таким чином, за означенням

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y=f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=y'_x.$$

Значення похідної функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ позначається одним із таких символів:

$$y'(x_0)=f'(x_0).$$

Приклад. Знайдіть за означенням похідну функції $y=cos\ x$.

Розв’язання. Запишемо приріст заданої функції $\Delta y = cos\,(x+\Delta x) - cos\,x$. Використовуючи першу важливу границю у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\,x}{\Delta x} = 1\,,$$

а також формулу розкладання різниці косинусів у добуток

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,,$$

дістаємо

$$(cos\,x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\,(x+\Delta x) - cos\,x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,sin\,\frac{\Delta x}{2}\,sin\,\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\,sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} sin\,\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot sin\,x = -sin\,x\,.$$

1.2. Механічний фізичний та геометричний зміст похідної. Механічний зміст похідної:

Механічний зміст похідної:

Швидкість в даний момент часу — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t :

$$v = S'(t).$$

Фізичний зміст похідної:

Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції у відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — миттєву швидкість зміни функції.

Геометричний зміст похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов’язані між собою умовою перпендикулярності, то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ *в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *має вигляд:*

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

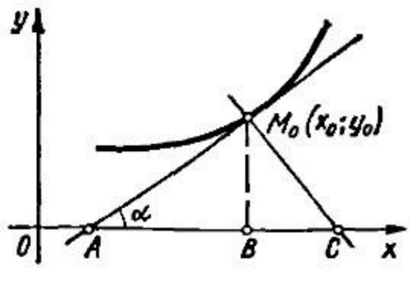


Рис. 2.