ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 342–350
doi:10.15330/cmp.6.2.342-350

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.342–350

Пукальський І.Д.

ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ І ВИРОДЖЕННЯМ

З допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок вивчається задача з косою похідною для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах за просторовими змінними та імпульсними умовами за часовою змінною. У гельдерових просторах зі степеневою вагою встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: крайова задача, імпульсна умова, виродження, особливості.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

Вступ

Математичне моделювання багатьох фізичних та хімічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Зокрема, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженням проведені у працях [2–4].

Вивчення систем з розривними траєкторіями пов'язано з розвитком техніки, в якій імпульсні системи керування відіграють значну роль. Багато задач теорії оптимального керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у працях А.М. Самойленка і О.М. Перестюка [5, 6] та інших авторів.

Питання існування періодичних розв'язків рівняння із частинними похідними гіперболічного типу з імпульсною дією вивчалися у працях [7–9]. Побудові теорії коректності задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у максимально широких просторах Діні присвячено другий розділ монографії [10].

У цій статті розглядається задача з косою похідною для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайовій умові на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною у визначені моменти часу. Одержано існування та встановлено оцінки похідних розв'язку поставленої задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K35.

1 Постановка задачі і основний результат

Нехай D — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω — деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,\dots,N\}$, $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \qquad (2)$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(t_\lambda,x), \qquad (3)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D} (\mathcal{B}u - g)(t,x) \equiv \lim_{x\to z\in\partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} u + b_0(t,x)u - g(t,x)\Big] = 0, \qquad (4)$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1}$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(4). Нехай $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0,1,\dots,N\}$, β_i, γ, q, l — дійсні числа, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\gamma \ge 0$, $q \ge 0$, $l \ge 0$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ — довільні точки із $Q^{(k)}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $\rho = \inf\limits_{z\in\partial D}|x-z|$, $s(\beta_i,x) = \rho^{\beta_i}$ при $\rho \le 1$ і $s(\beta_i,x) = 1$ при $\rho \ge 1$.

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ — множину функцій u, які мають неперервні частинні похідні при $t \neq t_\lambda$, $x \notin \overline{\Omega}$, вигляду $\partial_t^i\partial_x^r u$, $2i+|r| \le [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_k\{\sup_{Q^{(k)}}|u|\} \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l = \sup_k\Big\{\sum_{2i+|r|\le[l]}\|u;\gamma;\beta;q_j;Q^{(k)}\|_{2i+|r|} + \langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l\Big\}$$

$$\equiv \sup_k\Big\{\sum_{2i+|r|\le[l]}\sup_{P\in Q^{(k)}} s(q+(2i+|r|)\gamma,x)|\partial_t^i\partial_k^r u(P)|\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,x)$$

$$+\sum_{2i+|r|=[l]}\Big[\sup_{(P_1,H_\nu)\subset Q^{(k)}}\Big[s(q+l\gamma,\tilde{x})\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,\tilde{x})|\partial_t^i\partial_x^r u(P_1) - \partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)|$$

$$\times|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}s(-\{l\}\beta_\nu,\tilde{x})\Big]$$

$$+\sup_{(R_\nu,H_\nu)\subset Q^{(k)}}\Big[s(q+l\gamma,\tilde{x})\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,\tilde{x})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2}\right\}}|\partial_t^i\partial_x^r u(R_\nu) - \partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)\Big]\Big]\Big\},$$

де $|r| = r_1+\dots+r_n$, $l = [l]+\{l\}$, $s(q,\tilde{x}) = \min\{s(q,x^{(1)}),s(q,x^{(2)})\}$.

Щодо задачі (1)–(4) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)s(\beta_i+\beta_j,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 — фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i+\beta_j;x)A_{ij} \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_i,x)\,A_i \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_0,x)A_0 \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\inf\limits_{\overline{Q}} A_0(t,x) \equiv a_0 > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_i \geq 0$, $\mu_0 \geq 0$; $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$;

б) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)},\ldots,b_n^{(s)}\}$, $b_j^{(s)} = s(\beta_j,x)b_j$ і $\overrightarrow{e} = \{e_1,\ldots,e_n\}$, $e_j = b_j\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{-1/2}$, утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x) \in \Gamma$ кут менший за $\dfrac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $s(\beta_j,x)b_j \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\delta,x)b_0 \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $b_0(t,x)|_{\Gamma} \geq 0$, $\delta \geq 0$, $g \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)})$, $\lim\limits_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}\varphi_0 - g)(t_0,x) = 0$, $[g(t_\lambda+0,x) - g(t_\lambda-0,x)]_{\partial D} = [\psi_\lambda g(t_\lambda-0,x) + \mathcal{B}\varphi_\lambda(t_\lambda,x)]_{\partial D}$, $\varphi_\lambda \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_\lambda))$, $\gamma = \max\Big\{\max\limits_i(1+\beta_i), \max\limits_i(\mu_i-\beta_i), \frac{\mu_0}{2}, \delta\Big\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\begin{aligned}
\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c\Bigg\{&\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+|\psi_\lambda|)(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}\\
&+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_{\alpha} + \|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\\
&+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}\\
&+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_{\alpha} + \|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для дослідження задачі (1)–(4) встановимо спочатку коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(4).

2 Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \Big\{(t,x) \in Q^{(k)}\,\rho(x) \geq \dfrac{1}{m}\Big\}$, $m > 1$ — послідовності областей, які при $m \to \infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які задовольняють при $t \neq t_\lambda$ рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big]u_m = f_m(t,x), \tag{6}$$

умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x), \tag{8}$$

і крайову умову

$$(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(t,x)|_{\Gamma} \equiv \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\Big]\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{9}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в області $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_0, φ_λ, g відповідно, а в областях $Q \setminus Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, функцій f, φ_0, φ_λ, g із областей $Q_m^{(k)}$ в область $Q \setminus Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [12, стор. 82].

Для розв'язків задачі (6)–(9) справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай $u_m(t,x)$ — класичний розв'язок задачі* (6)–(9) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{N} \left\{ \prod_{\lambda=k}^{N} (1+|\psi_\lambda|)(\|\varphi_m^{(k-1)}; Q\cap(t=t_{k-1})\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\|_0 \right.$$
$$\left. + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\|_0) \right\} + \|\varphi_N; Q\cap(t=t_N)\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $\max\limits_{\overline{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(R_1)$. Якщо $R_1 \in Q^{(k)}$, то в точці R_1 виконуються співвідношення

$$\partial_t u_m(R_1) \geq 0, \partial_{x_i} u_m(R_1) = 0, \qquad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(R_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(R_1) \leq 0 \tag{11}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (11) і рівняння (6) в точці R_1 правильна нерівність

$$u_m(R_1) \leq \sup_{Q^{(k)}}(f, a_0^{-1}). \tag{12}$$

Нехай $\min\limits_{Q^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(R_2)$. Якщо $R_2 \in Q^{(k)}$, то в точці R_2 виконується співвідношення

$$\partial_t u_m(R_2) \leq 0, \partial_{x_i} u_m(R_2) = 0, \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(R_2)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(R_2) \geq 0 \tag{13}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (13) і рівняння (6) в точці R_2 маємо

$$u_m(R_2) \geq \inf_{Q^{(k)}}(f, a_0^{-1}). \tag{14}$$

Якщо $R_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то виконується умова (9). Оскільки $\dfrac{du_m(R_1)}{d\overrightarrow{e}} \geq 0$ (вектор $\overrightarrow{e}$ задовольняє умову б)), то з рівності $(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(R_1) = 0$ маємо

$$u_m(R_1) \leq \sup_{\overline{Q}^{(k)}}(g_m h_0^{-1}). \tag{15}$$

Якщо $R_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то $\dfrac{du_m(R_2)}{d\overrightarrow{e}} \leq 0$. Враховуючи крайову умову (9), маємо

$$u_m(R_2) \geq \inf_{\overline{Q}^{(k)}}(g_m h_0^{-1}). \tag{16}$$

У випадку, коли $R_1 \in \overline{D}$, або $R_2 \in \overline{D}$ з початкової умови (7), одержимо

$$|u_m| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{17}$$

Враховуючи нерівності (12), (14), (15), (16), (17) при $k=0$, одержимо

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{18}$$

Якщо $R_1 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, або $R_2 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то враховуючи умову (8), одержимо рекурентні співвідношення

$$\|u_m; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0 \leq (1 + |\varphi_\lambda|)\|u_m; Q^{(\lambda-1)}\|_0 + \|\varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0. \tag{19}$$

Об'єднуючи нерівності (12), (14), (15), (18), (19), одержимо нерівність (10). □

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(t,x)$. Введемо у просторі $C^l(Q)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\|_l$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_l$, тільки замість функцій $s(\beta_i, x)$ беремо відповідно $d(\beta_i, x)$: $d(\beta_i, x) = \max(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i \geq 0$ і $d(\beta_i, x) = \min(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i < 0$.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі* (6) — (9) *правильна оцінка*

$$\begin{aligned}\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c \Bigg\{ \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \prod_{\lambda=k}^{N} (1 + |\psi_\lambda|)(\|\varphi_{k-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} \\ + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}) \Big\} \\ + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} \\ + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Доведення. Для знаходження оцінки (20) в області $Q^{(k)}$ розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), (\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(t,x)|_{\Gamma^{(k)}} = 0, u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x), \tag{21}$$

де $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, $G_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x)$, $x \in D$, $G_m^{(\lambda)}(t_\lambda, x) = (1 + \psi_\lambda)[u_m(t_\lambda - 0, x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda, x)]$, $x \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \in \{1, \ldots, N\}$.

В областях $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (21) існує і єдиний в просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ ([4, стор. 364]). Знайдемо його оцінку. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [11], маємо

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha)\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|u_m; Q^{(k)}\|_0,$$

де ε — довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в $Q^{(k)}$ точок P_1, H_ν, R_ν, для яких правильна одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq E_\mu, \quad \mu \in \{1, 2\}, \tag{22}$$

де

$$E_1 = \sum_{2i+|r|=2} |x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}|^{-\alpha} d((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) d(-\alpha\beta_\nu, \tilde{x}) \prod_{j=1}^{n} d(-r_j\beta_j, \tilde{x}) |\partial_t^i \partial_x^r u_m(H_\nu) - \partial_t^i \partial_x^r u_m(P_1)|,$$

$$E_2 = \sum_{2i+|r|=2} |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} d((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) \prod_{j=1}^{n} d(-r_j\beta_j, \tilde{x}) |\partial_t^i \partial_x^r u_m(H_\nu) - \partial_t^i \partial_x^r u_m(R_\nu)|,$$

$d(\gamma, \tilde{x}) = \min(d(\gamma, x^{(1)}), d(\gamma, x^{(2)}))$.

Якщо $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}| \geq n^{-1} d(\gamma - \beta_\nu, \tilde{x}) \dfrac{\varepsilon_1}{4} \equiv T_1$, ε_1 — довільне дійсне число із (0, 1), то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \|_2 . \tag{23}$$

Якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq d(2\gamma, \tilde{x}) \dfrac{\varepsilon_1^2}{16} \equiv T_2$, то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \|_2 . \tag{24}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (23), (24), знаходимо

$$E_\mu \leq \varepsilon^\alpha \| u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \|_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \| u_m; Q^{(k)} \|_0 . \tag{25}$$

Нехай $|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(1)}| \leq T_1$, $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$. Будемо вважати $|x_\nu^{(1)} - y_\nu| \geq 4T_1$, $y \in \partial D$ і $d(\gamma, \tilde{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q^{(k)}$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. В області $Q^{(k)}$ запишемо задачу (21) у вигляді

$$\begin{aligned} \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big] u_m &= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m \\ &\quad - \sum_{i=1}^n a_i(P)\partial_{x_i} u_m - a_0(P) u_m + f_m(t,x) \equiv F(t,x;u_m), \end{aligned} \tag{26}$$

$$u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x), \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i(P_1)\partial_{x_i} u_m|_{\Gamma^{(k)}} &= \Big\{ \sum_{i=1} [h_i(P_1) - h_i(P)]\partial_{x_i} u_m - h_0(P) u_m + g_m(P) \Big\}\Big|_{\Gamma^{(k)}} \\ &\equiv \Phi_m(t, x; u_m)|_{\Gamma^{(k)}} . \end{aligned} \tag{28}$$

Нехай V_τ — область із $Q^{(k)}$, $V_\tau = \{(t,x) \in Q^{(k)}, |x_j - x_j^{(1)}| \leq \tau T_1,\ j \in \{1, \dots, n\},\ |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2\}$. В задачі (26), (28) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_j = d(\beta_j, x^{(1)}) x_j$, одержимо

$$(L_2 v_m)(t,y) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) d(\beta_i + \beta_j, x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big] v_m = F(t, Y; v_m), \tag{29}$$

$$v_m(t_k + 0, Y) = G_m^{(k)}(t_k, Y), \tag{30}$$

$$(\mathcal{B}_2 v_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \Big[\sum_{i=1}^n h_i(P_1) d(\beta_i, x^{(1)})\partial_{y_i} v_m \Big]\Big|_{\Gamma^{(k)}} = \Phi_m(t, Y; v_m)|_{\Gamma^{(k)}}, \tag{31}$$

де $Y = (d(-\beta_1, x^{(1)})x_1, \dots, d(-\beta_n, x^{(1)})x_n)$.

Позначимо через $y_j^{(1)} = d(\beta_j, x^{(1)}) x_j^{(1)}$, $V_\tau^{(1)} = \{(t,y), |t - t^{(1)}| \leq \tau^2 T_2, |y_j - y_j^{(1)}| \leq \tau\sqrt{T_2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in V_{1/2}^{(1)}, 0 \leq \eta(t,y) \leq 1; \\ 0, & (t,y) \notin V_{3/4}^{(1)}, |\partial_t^i \partial_y^r \eta| \leq c_{ri} d(-(2i + |r|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $\omega_m(t,y) = v_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_2\omega_m)(t,y) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j, x^{(1)})\{\partial_{y_i}v_m\partial_{y_j}\eta + \partial_{y_j}v_m\partial_{y_i}\eta + v_m\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta\} \\ + \eta F(t,Y;v_m) \equiv F_1(t,y;v_m), \tag{32}$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,Y)\eta(t_k,y), \tag{33}$$

$$(\mathcal{B}_2\omega_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} = \left\{\eta(t,y)\Phi(t,Y;v_m) - v_m\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)d(\beta_i,x_i^{(1)})\partial_{y_i}\eta\right\}\Bigg|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \Phi_m^{(1)}(t,Y;v_m). \tag{34}$$

На підставі теореми 5.3 із [4, стор. 364] для розв'язку задачі (32)–(34) і довільних точок $(M_1,M_2) \subset V_{1/2}^{(1)}$ справджується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^i\partial_x^r v_m(M_1) - \partial_t^i\partial_x^r v_m(M_2)| \\ \le c(\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)})} + \|G_m^{(k)}(\eta)\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k))} + \|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\Gamma^{(k)})}), \tag{35}$$

$2i+|r|=2$, $d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\|F_1\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)})} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\|_2),$$

$$\|G_m^{(k)}\eta\|_{C^\alpha(V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k))} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

$$\|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)}\cap\Gamma^{(k)})} \le cd(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})(\|g_m;\gamma;0;\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha} \\ + \|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|v_m;\gamma;0;0;V_{3/4}^{(1)}\|_2), \tag{36}$$

Підставляючи (36) у (35) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо нерівність

$$E_\mu \le (\varepsilon^\alpha(n+2) + \varepsilon_1 Cn^2)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;Q^{(k)}\|_\alpha \\ + \|g_m;\gamma;\beta;\gamma;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} + \|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|u_m;Q^{(k)}\|_0). \tag{37}$$

Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k,x)$ при $k=0$, маємо

$$\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\cap(t=t_0)\|_{2+\alpha} = \|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}. \tag{38}$$

Об'єднуючи нерівності (18), (25), (37), (38) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(0)}\|_\alpha \\ + \|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(0)}\|_{1+\alpha}). \tag{39}$$

Якщо $k \ge 1$, то враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k,x)$, одержимо нерівності

$$\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \le (1+|\psi_k|)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} \\ + \|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}. \tag{40}$$

Об'єднуючи нерівності (19), (22), (25), (37), (38), (40) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо нерівності

$$\begin{aligned}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha} &\le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha + \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}) \\ &+ (1+|\psi_k|)\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha} + \|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}).\end{aligned} \tag{41}$$

Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha, \quad \|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha} \le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$
$$\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} \le c\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

то об'єднавши нерівності (39) і (41), одержимо оцінку (20).

Розглянемо випадок $|x_\nu^{(1)} - y_\nu| \le 4T_1$, $y \in \partial D$, $\nu \in \{1,2,\ldots,n\}$. Вважаємо для простоти $\nu = n$. Нехай $K(P)$ — куля радіуса R_0, $R_0 \ge 4(T_1 n + T_2)$ з центром в деякій точці $P \in \Gamma^{(k)}$, яка містить точки P_1, H_j, R_j. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(\xi)$ із [12, стор. 126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)} \cap K(P)$ перейде в область Π, для точок якої $\xi_n \ge 0$.

Вважаємо, що $u_m(t,x)$, P_1, H_j, R_j при цьому перетворенні переходять відповідно в $v_m(t,\xi)$, M_1, Z_j, Θ_j. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L_1, $\mathcal{B}_1$ в області Π через $\tilde a_{ij}(t,\xi)$, $\tilde a_i(t,\xi)$, $\tilde a_0(t,\xi)$, $\tilde h_k(t,\xi)$, $\tilde h_0(t,\xi)$. Тоді $v_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{ji=1}^n \tilde a_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]v_m &= \sum_{ij=1}^n [\tilde a_{ij}(t,\xi) - \tilde a_{ij}(M_1)]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}v_m - \sum_{i=1}^n \tilde a_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}v_m \\ &- \tilde a_0(t,\xi)v_m + f_m(t,\pi(\xi)),\end{aligned}$$

$$v_m(t_0+0,\xi) = G_m^{(k)}(t_k,\pi(\xi)),$$
$$\sum_{i=1}^n \tilde h_i(M_1)\partial_{\xi_i}v_m\Big|_{\xi_n=0} = \left\{\sum_{i=1}^n [\tilde h_i(M_1) - \tilde h_i(t,\xi)]\partial_{\xi_i}v_m - \tilde h_0(t,\xi)v_m + g_m(t,\pi(\xi))\right\}\Bigg|_{\xi_n=0}.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінок розв'язку задачі (21), і використовуючи при цьому теорему 6.1 із [4, стор. 364], одержимо нерівність (20). □

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (20) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\} \equiv \{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(2)}\} \equiv \{d(2\gamma;x)\ \partial_t u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(3)}\} \equiv \{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(t,x)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в областях $Q^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{U_{m(j)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\mu)}\}$ при $m(j)\to\infty$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(j)\to\infty$ в задачі (6)–(9), одержимо, що $u(t,x) = U_0^{(0)}$ — єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$. □

3 Висновки

Досліджено задачу з косою похідною для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах на деякій множині точок та імпульсними умовами за часовою змінною.

В гельдерових просторах зі степеневою вагою доведено існування, єдиність та одержані оцінки похідних розв'язку поставленої задачі.

References

[1] Seitz F. Modern solid state theory. Phys. Mat. Lit., Moscow, 1949. (in Russian)

[2] Bazalii B.V., Shelepov V.Yu. *Variational methods in a mixed problem of thermal equilibrium with a free boundary*. In: Leifman L.J. (Ed.) Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Eleven Papers on Differential Equations, vol. 126, 77–92.

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. In: Ser. Operator Theory: Adv. and Appl., 152. Birkhäuser, Basel, 2004.

[4] Ladygenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear parabolic equations. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

[5] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulse Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1995.

[6] Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Walter de Gruyter Co, Berlin, 2011.

[7] Perestyuk N.A., Tkach A.B. *Periodic solutions of a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence*. Ukrainian Math. J. 1997, **49** (4), 665–671. doi:10.1007/BF02487331 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1997, **49** (4), 601–605. (in Ukrainian))

[8] Bainov D.D., Minchev E., Myshkis A. *Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems*. Commun. Appl. Anal. 1997, **1** (4), 1–14.

[9] Asanova A.T. *On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations*. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (3), 349–365. doi:10.1007/s11253-013-0782-x (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (3), 315–328. (in Ukrainian))

[10] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic problems on Dini spaces. Prut, Chernivtsi, 2010. (in Ukrainian)

[11] Pukalsky I. Boundary problems for irregularly parabolic and elliptic equations with degeneration and peculiarities. Prut, Chernivtsi, 2008. (in Ukrainian)

[12] Fridman A. Partial differential equations of parabolic type. Dover Publ., Mineola, New York, 2008.

Надійшло 24.10.2013

Pukalskiy I.D. *The problem with inclined derivative for a parabolic equations with impulse conditions and degeneration*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 342–350.

By application of maximum principle and apriori estimates it is studied the inclined derivative problem for a linear parabolic equation with power singularity in the coefficients with respect to space variables and impulse conditions respect to time variable. It is established the uniqueness and the existence of the solution of the stated problem in Hölder spaces.

Key words and phrases: boundary problem, impulse condition, degeneration, peculiarities.

Пукальский И.Д. *Задача с косой производной для параболических уравнений с импульсными условиями и вырождением* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 342–350.

С помощью принципа максимума и априорных оценок изучается задача с косой производной для линейного параболического уравнения со степенными особенностями в коэффициентах по пространственным переменным и импульсными условиями по временной переменной. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решения поставленной задачи.

Ключевые слова и фразы: краевая задача, импульсное условие, вырождение, особенности.