ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 256–259
doi:10.15330/cmp.6.2.256-259

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.256–259

Карлова О.

ФУНКЦІЇ ЗІ ЗВ'ЯЗНИМ ГРАФІКОМ ТА B_1-РЕТРАКТИ

Підмножина E топологічного простору X називається B_1-ретрактом цього простору, якщо існує відображення $r : X \to E$, яке є поточковою границею послідовності неперервних відображень $r_n : X \to E$, і таке, що $r(x) = x$ для всіх $x \in E$. Доводиться, що графік функції $f : \mathbb{R} \to Y$, де простір Y — це об'єднання зростаючої послідовності континуумів, є B_1-ретрактом добутку $\mathbb{R} \times Y$ тоді і тільки тоді, коли функція f неперервна.

Ключові слова і фрази: B_1-ретракт, H_1-ретракт, функція першого класу Бера, функція з лінійно зв'язним графіком.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: maslenizza.ua@gmail.com

Вступ

Нехай P — деяка властивість відображень. Сукупність усіх відображень між топологічними просторами X і Y, які мають властивість P, ми позначаємо через $P(X, Y)$. Символом C ми позначаємо властивість неперервності.

Відображення $f : X \to Y$, де X і Y — топологічні простори, називається

- *відображенням першого класу Бера*, $f \in B_1(X, Y)$, якщо існує така послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, що $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in X$;
- *відображенням першого класу Лебеґа*, $f \in H_1(X, Y)$, якщо множина $f^{-1}(G)$ є типу F_σ в X для довільної відкритої в Y множини G.

Підмножину E топологічного простору X назвемо *P-ретрактом* простору X, якщо існує таке відображення $r \in P(X, E)$, що $r(x) = x$ для всіх $x \in E$. При цьому відображення r називається *P-ретракцією* простору X на E. Якщо відображення r неперервне, то E називається просто *ретрактом* простору X (див. [1]).

Властивості H_1- і B_1-ретрактів досліджувалися в [3] і [4]. Так, в [3] була встановлена наступна характеризація H_1-ретрактів повнометризовних просторів.

Теорема 1. *Множина E є H_1-ретрактом повнометризовного простору X тоді і тільки тоді, коли E є типу G_δ в X.*

В [4] було показано, що B_1-ретракт метризовного простору є множиною типу G_δ, а довільний B_1-ретракт зв'язного простору є зв'язним. Проте, ані локальна зв'язність, ані лінійна зв'язність вже не зберігаються B_1-ретракціями (див. [4, Приклад 4.2]).

Також в [4] був отриманий такий результат.

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C20, 54C15, 26A21.

Теорема 2. *Нехай X — повнометризовний простір і $E \subseteq X$ — лінійно зв'язна і локально лінійно зв'язна G_δ-множина. Тоді E є B_1-ретрактом простору X.*

Зауважимо, що кожна B_1-ретракція топологічного простору X на метризовний простір E є також H_1-ретракцією (див., наприклад, [2, Лема 2.7]). Обернене твердження не вірне навіть для зв'язних G_δ-множин $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Так, в [4] був наведений приклад функції $f : [0,1] \to [-1,1]$, графік якої є зв'язною G_δ-підмножиною (а значить, H_1-ретрактом) добутку $[0,1] \times [-1,1]$, але не є B_1-ретрактом простору $[0,1] \times [-1,1]$.

У зв'язку з цим природно постає задача про опис функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, графіки яких є B_1-ретрактами площини $\mathbb{R}^2$. В цій статті ми доводимо, що графік функції $f : \mathbb{R} \to Y$, де простір Y — це об'єднання зростаючої послідовності континуумів, є B_1-ретрактом добутку $\mathbb{R} \times Y$ тоді і тільки тоді, коли функція f неперервна.

Основні результати

Нехай f — деяке відображення топологічного простору X у топологічний простір Y. Графік відображення f ми позначаємо через Γ_f. Для всіх $x \in X$ покладемо

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Зрозуміло, що $\Gamma_f = \gamma_f(X)$. Крім того, зауважимо, що відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервне відображення $\gamma_f : X \to \Gamma_f$.

Сукупність всіх функцій $f : X \to Y$, графіки яких є P-ретрактами добутку $X \times Y$, ми будемо позначати через $\Gamma_{\mathrm{P}}(X,Y)$.

У світлі теореми 2 виникає питання, чи кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з лінійно зв'язним графіком належить до класу $\Gamma_{\mathrm{B}_1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Покажемо, що відповідь на це позитивна.

Нагадаємо, що відображення f між топологічними просторами X та Y *має властивість Дарбу*, якщо образ $f(C)$ довільної зв'язної множини $C \subseteq X$ є зв'язною множиною в Y.

Лема 1. *Якщо існує бієкція φ з властивістю Дарбу лінійно зв'язного гаусдорфового простору X на відрізок $[a,b]$, то X — компакт.*

Доведення. З лінійної зв'язності простору X випливає, що існує така неперервна функція $\gamma : [a,b] \to X$, що $\varphi^{-1}(a) = \gamma(a)$ і $\varphi^{-1}(b) = \gamma(b)$. Оскільки множина $\varphi(\gamma([a,b])) \subseteq [a,b]$ зв'язна і містить кінці відрізка $[a,b]$, то вона збігається з $[a,b]$. Тоді $\gamma([a,b]) = \varphi^{-1}([a,b]) = X$, адже φ — бієкція. Таким чином, X — компакт, як гаусдорфовий неперервний образ компакта. □

Через π_X та π_Y ми будемо позначати проекції $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_X(x,y) = x$, і $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $\pi_Y(x,y) = y$.

Твердження 1. *Нехай Y — топологічний простір. Для відображення $f : [a,b] \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;

2) Γ_f — лінійно зв'язний;

3) Γ_f — компакт.

Доведення. Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) випливає з рівності $\Gamma_f = \gamma_f([a,b])$ і неперервності відображення γ_f.

2) $\Rightarrow$ 3). Легко бачити, що простір Γ_f гаусдорфовий. Оскільки відображення $\pi_X|_{\Gamma_f}$ є неперервною бієкцією на відрізок $[a,b]$, то простір Γ_f є компактом за лемою 1.

3) $\Rightarrow$ 1). Оскільки неперервна бієкція $\pi_X|_{\Gamma_f}$ між компактами є гомеоморфізмом, то відображення $\gamma_f = (\pi_X|_{\Gamma_f})^{-1}$ неперервне. Тому відображення $f = \pi_Y \circ \gamma_f : [a,b] \to Y$ теж неперервне. ☐

Зауважимо, що для відображення f, визначеного на зв'язній підмножині $X \subseteq \mathbb{R}$ умови 1) або 2) твердження 1 виконуються тоді і тільки тоді, коли вони виконуються для звуження відображення $f|_{[a,b]}$ на довільний відрізок $[a,b] \subseteq X$. Таким чином, з твердження 1 негайно випливає наступний факт.

Наслідок 1. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина і Y — топологічний простір. Для відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;

2) Γ_f — лінійно зв'язний.

Твердження 2. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина і Y — лінійно зв'язний простір. Для відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

1) f — неперервне;

2) Γ_f — лінійно зв'язний;

3) Γ_f — ретракт добутку $X \times Y$.

Доведення. Досить довести імплікації 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2).

Якщо відображення f неперервне, то і відображення $r : X \times Y \to \Gamma_f$, $r(x,y) = \gamma_f(x)$, неперервне, причому $r(x,y) = (x,y)$ для всіх $(x,y) \in \Gamma_f$. Отже, 1) $\Rightarrow$ 3).

Якщо ж $r : X \times Y \to \Gamma_f$ — деяка ретракція, то простір $\Gamma_f = r(X \times Y)$ лінійно зв'язний як образ лінійно зв'язного простору при неперервному відображенні. Таким чином, встановлена імплікація 3) $\Rightarrow$ 2). ☐

Нагадаємо, що зв'язний компактний гаусдорфовий простір називається *континуумом*. Казатимемо, що гаусдорфовий простір є *σ-континуумом*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх зв'язних компактних підпросторів.

Підпростір E топологічного простору X називається *слабким B_1-ретрактом* [5] цього простору, якщо існує така послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $r_n : X \to E$, що $r_n(x) \to x$ для всіх $x \in E$.

Твердження 3. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ — зв'язна множина, Y — σ-континуум і $f : X \to Y$ — відображення, графік якого є слабким B_1-ретрактом добутку $X \times Y$. Тоді відображення f неперервне у всіх внутрішніх точках множини X.*

Доведення. Розглянемо послідовність $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $r_n : X \times Y \to \Gamma_f$, таку, що $r_n(p) \to p$ для всіх $p \in \Gamma_f$, і таку зростаючу послідовність $(K_m)_{m=1}^{\infty}$ континуумів, що $Y = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$.

Візьмемо довільний відрізок $[a,b] \subseteq \operatorname{int} X$ і покажемо, що відображення f неперервне на цьому відрізку. Нехай x_1, x_2 — такі точки з X, що $x_1 < a$ і $x_2 > b$. Оскільки $r_n(\gamma_f(x_i)) \to \gamma_f(x_i)$ при $i = 1,2$, то існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\pi_X(r_n(\gamma(x_1))) < a$ і

$\pi_X(r_n(\gamma(x_2))) > b$. Позначимо $F_m = \pi_X(r_n([x_1, x_2] \times K_m))$. Тоді $(F_m)_{m=1}^\infty$ — зростаюча послідовність континуумів в $\mathbb{R}$, об'єднання яких покриває відрізок $[a, b]$. Легко бачити, що існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $[a, b] \subseteq F_m$. Тоді $\Gamma_{f|_{[a,b]}} = ([a, b] \times Y) \cap r_n([x_1, x_2] \times K_m)$. Отже, графік звуження $f_{[a,b]}$ є компактом. З твердження 1 випливає, що відображення $f_{[a,b]}$ неперервне. □

З тверджень 2, 3 і очевидного включення $\Gamma_C(X, Y) \subseteq \Gamma_{B_1}(X, Y)$, яке справджується для довільних топологічних просторів X і Y, випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай Y — σ-континуум. Тоді* $\Gamma_C(\mathbb{R}, Y) = \Gamma_{B_1}(\mathbb{R}, Y) = C(\mathbb{R}, Y)$.

Зауваження 1. *Теорема 3 не вірна для функцій двох змінних. Розглянемо таку функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, що $f(x, 0) = -x^2$ при $|x| \leq 1$ і $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$. Функція f розривна в усіх точках множини $[-1, 1] \times \{0\}$. Графік Γ_f цієї функції є лінійно зв'язною і локально лінійно зв'язною G_δ-підмножиною простору $\mathbb{R}^3$. Тому $f \in \Gamma_{B_1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ згідно з теоремою 2. З іншого боку, множина Γ_f не замкнена в $\mathbb{R}^3$. Звідси випливає, що $f \notin \Gamma_C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, адже довільний ретракт гаусдорфового простору замкнений в ньому.*

References

[1] Borsuk K. Retracts theory. Mir, Moscov, 1971. (in Russian)

[2] Zolotuhina T., Karlova O., Sobchuk O. *On extention of Baire-one functions with values in σ- metricized spaces*. Ukr. Math. Visn. 2008, **5** (2), 280–287. (in Ukrainian)

[3] Karlova O. *Extension of continuous mappings and H_1-retracts*. Bull. Aust. Math. Soc. 2008, **78** (3), 497–506. doi:10.1017/S0004972708000907

[4] Karlova O. *Extension of continuous functions to Baire-one functions*. Real Anal. Exchange 2011, **36** (1), 149–160.

[5] Karlova O. *On perfect cones and absolute B_1-retracts*. Tatra Mt. Math. Publ. (accepted).

Надійшло 24.09.2013

Після переробки 03.10.2014

Karlova O. *Functions with connected graph and B_1-retracts*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 256–259.

A subset E of a topological space X is called a B_1-retract if there exists a mapping $r : X \to E$ which is the pointwise limit of a sequence of continuous mappings $r_n : X \to E$ and $r(x) = x$ for all $x \in E$. We prove that if Y is a union of an increasing sequence of continuums, then the graph of a function $f : \mathbb{R} \to Y$ is a B_1-retract of $\mathbb{R} \times Y$ if and only if f is continuous.

Key words and phrases: B_1-retract, H_1-retract, Baire-one function, function with arcwise connected graph.

Карлова Е. *Функции со связным графиком и B_1-ретракты* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 256–259.

Подмножество E пространства X называется B_1-ретрактом этого пространства, если существует отображение $r : X \to E$, которое является поточечным пределом последовательности непрерывных отображений $r_n : X \to E$, причем $r(x) = x$ для всех $x \in E$. Доказано, что график функции $f : \mathbb{R} \to Y$, где пространство Y — это объединение возрастающей последовательности континуумов, является B_1-ретрактом произведения $\mathbb{R} \times Y$ в том и только том случае, если функция f непрерывна.

Ключевые слова и фразы: B_1-ретракт, H_1-ретракт, функция первого класса Бэра, функция с линейно связным графиком.