Міністерство освіти і науки України

Прикарпатський національний університет

імені Василя Стефаника

Пилипів В.М., Ліщинський І.І.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Івано-Франківськ

2021

УДК 511.21
ББК 22.131
П 32

Посібник розроблено для користування студентами класичних і технічних університетів при вивченні теорії чисел та її частин.

Зміст

Розділ I

Теорія комплексних чисел

§ 1. Побудова поля комплексних чисел

Протягом курсу елементарної алгебри декілька разів відбувалося збагачення запасу чисел. Так, доповнення відомих із арифметики додатніх цілих і дробових чисел від'ємними числами сприяло оформленню перших найважливіших числових систем — кільця цілих чисел і поля раціональних чисел. Введення до розгляду ірраціональних чисел призвело до створення із них та з раціональних чисел нової важливої числової системи — поля дійсних чисел, які відіграють важливу роль при вимірюванні довжин, площ, об'ємів, при вивченні рухів матеріальних тіл тощо. Однак існують задачі, для розв'язання яких дійсних чисел не вистачає, і найпростішою з них є знаходження розв'язків квадратного рівняння

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

У полі дійсних чисел це рівняння не розв'язується, оскільки не існує дійсного числа, квадрат якого дорівнював би -1. Історія математики зафіксувала тривалу і вперту боротьбу прихильників і противників "уявних"чисел, джерелом яких послужило рівняння (1.1). Обмеження ж розв'язків цього рівняння формальним записом у вигляді $\pm\sqrt{-1}$ не давало відповіді на питання про зміст цього запису. Тому постала задача необхідності розширення поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел так, щоб в новому полі рівняння (1.1) мало розв'язки (це нове поле було названо *полем комплексних чисел*, а елементи такого розширення — *комплексними числами*).

Вивчення питання побудови комплексних чисел розпочнемо із розгляду однієї із моделей такого розширення, в ролі якої вибрано множину $\mathbb{P}$ всіх квадратних матриць вигляду

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad \text{де } a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Покажемо, що $\mathbb{P}$ — поле. Дійсно, матриці $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ і $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ вигляду (1.2) є відповідно нульовим і одиничним елементом кільця $M_2(\mathbb{R})$ квадратних матриць (a_{ij}) другого порядку з дійсними елементами a_{ij}. Результат операцій додавання матриць множини $\mathbb{P}$ та їх множення не виходять за межі $\mathbb{P}$, тобто множина $\mathbb{P}$ є замкнутою відносно вказаних операцій, а асоціативність цих операцій, комутативність додавання та дистрибутивність множення відносно додавання є наслідком виконання цих властивостей в кільці M_2. Комутативність множення випливає безпосередньо:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Залишилось довести оборотність довільної невиродженної матриці (1.2). Із умови

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

випливає, що

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \qquad \text{де } x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2},$$

тобто, $x, y \in \mathbb{R}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$ із невиродженості матриці (1.2)) і довільна матриця (1.2) оборотна. Таким чином, $\mathbb{P}$ – поле.

Виявляється, що матриця $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, яка належить полю $\mathbb{P}$, є, з точністю до ізоморфізму, розв'язком рівняння (1.1). Дійсно, $I^2 + E = O$, де E та O – відповідно одиничний та нульовий елемент поля $\mathbb{P}$. Таким чином, в полі $\mathbb{P}$ матриць вигляду (1.2) розв'язок рівняння (1.1) має цілком конкретний зміст, тобто є зовсім не уявною величиною. Довільний елемент (1.2) поля $\mathbb{P}$ можна подати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = aE + bI, \qquad \text{де } a, b \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо тепер ще одну модель розширення поля $\mathbb{R}$, елементи якого є впорядкованими парами дійсних чисел, тобто геометрично зображаються точками площини $\mathbb{R}^2$. В множині всеможливих упорядкованих пар (a, b) дійсних чисел a і b визначимо операції додавання і множення так, щоб компоненти пар-результатів цих операцій співпадали з відповідними елементами суми та добутку матриць (1.2) поля $\mathbb{P}$, тобто

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1.3}$$

Саме такий вибір означення суми і добутку впорядкованих пар дає можливість здійснити необхідне розширення поля $\mathbb{R}$. Безпосередня перевірка аксіом поля підтверджує, що множина впорядкованих пар дійсних чисел із саме так визначеними операціями додавання і множення утворює поле, яке позначають $\mathbb{C}$ (перевірити самостійно). Таким чином, отримано поле

$$\mathbb{C} = (\{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}, +, \cdot). \tag{1.4}$$

Безпосередньої перевірки аксіом поля можна уникнути, поставивши у відповідність кожній впорядкованій парі (a, b) матрицю $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ поля $\mathbb{P}$ і встановивши з допомогою операцій (1.3) ізоморфізм відображення множин $\mathbb{C}$ і $\mathbb{P}$. Дійсно, із

$$(a,b) \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad (c,d) \longrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

випливає, що

$$(a+c, b+d) \longrightarrow \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix};$$

$$(ac-bd, ad+bc) \longrightarrow \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}$$

і навпаки. Отже $\mathbb{C} \cong \mathbb{P}$, тобто $\mathbb{C}$ – поле.

Геометричною реалізацією поля $\mathbb{C}$ є площина $\mathbb{R}^2$, яку називають *комплексною площиною.*

Поле $\mathbb{C}$ є розширенням поля $\mathbb{R}$, оскільки поле дійсних чисел $\mathbb{R}$ ізоморфне деякому підполю $\mathbb{R}'$ поля $\mathbb{C}$, яке має вигляд $\mathbb{R}' = (\{(a,0), a \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$. Дійсно, поставивши у відповідність кожному дійсному числу a пару $(a,0)$, задамо відображення $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$, яке є ізоморфізмом, оскільки зберігає операції:

$$\varphi(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = (ab,0) = (a,0) \cdot (b,0) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Оскільки $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}'$, то елемент $(a,0)$ поля $\mathbb{R}'$ ототожнимо з a і вважатимемо $(a,0) = a$, тобто вісь абсцис (множина точок $(a,0)$) нічим не відрізняється за властивостями від дійсної прямої. Нульовий і одиничний елементи поля — це звичайні дійсні числа, тобто $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$.

Покажемо, що поле $\mathbb{C}$ містить корінь рівняння (1.1). Так, одним із коренів цього рівняння є елемент $(0,1)$. Дійсно, $(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Ще одним коренем рівняння (1.1) є елемент $(0,-1)$. Позначимо елемент $(0,1)$ символом i([1]). Звідки $(0,-1) = -(0,1) = -i$. Тоді довільний елемент поля $\mathbb{C}$ (комплексне число) (a,b) позначається так:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi, \qquad \text{де } a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Крім побудованого вище поля $\mathbb{C}$ є й інші розширення поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел, утворені приєднанням до $\mathbb{R}$ кореня квадратного рівняння $x^2 + 1 = 0$, способи побудови яких відрізняються від вищеописаного і елементами яких є не впорядковані пари дійсних чисел чи матриці, а об'єкти інакшої природи. Однак всі такі розширення за своїми алгебраїчними властивостями є нерозрізненними.

[1]Визначення i (i – це перша буква латинського слова imaginarius – уявний) для кореня рівняння $x^2 + 1 = 0$ (тобто $\sqrt{-1}$) ввів у 1777 році Леонард Ойлер

§ 2. Алгебраїчний вигляд комплексного числа

Скористаємось для позначення комплексних чисел малими грецькими літерами $\alpha, \beta, \gamma, ...$

Запис комплексного числа у вигляді

$$\alpha = a + bi, \qquad \text{де } a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

i – корінь рівняння $x^2 + 1 = 0$, називають *алгебраїчною формою комплексного числа*. Відповідно до історичної традиції комплексне число i називають *уявною одиницею*, числа bi – *уявними числами*. В записі (2.1) $a = Re\ \alpha$ – дійсна частина комплексного числа α, а $bi = Im\ \alpha$ – його уявна частина (b – коефіцієнт уявної частини числа α).

Із означення рівності впорядкованих пар (елементів поля $\mathbb{C}$) випливає, що два комплексних числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти уявних частин, тобто $a + bi = c + di \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі, виконуються за наступними правилами:

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \tag{2.2}$$

$$\alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i, \tag{2.3}$$

$$\alpha \cdot \beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \tag{2.4}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i, \qquad \beta \neq 0. \tag{2.5}$$

Вправи.

(1) Знайти дійсну і уявну частини комплексних чисел:

(а) $(3 - 5i)^4 + (3 - 5i)^4$;

(б) $\left(\frac{i^{15} - 2}{i^6 - i}\right)^2$;

(в) $\left(\frac{i - 1}{i + 1}\right)^{2009}$;

(г) $\frac{(2 - i)^3 - (1 - 2\sqrt{i})^2}{(1 + 2i)^2}$.

(2) Знайти корені квадратного рівняння:

(а) $z^2 - z + 1 - i = 0$;

(б) $z^2 + iz - 1 + i = 0$.

(3) Розв'язати систему рівнянь:

(а) $\begin{cases} (1 + i)x - (2 - i)y & = & i, \\ (1 - i)x + (2 + i)y & = & i; \end{cases}$

(б) $\begin{cases} (2 - i)x + (1 + i)y & = & 2 + i, \\ (2 + i)x - (1 - i)y & = & 2 - i. \end{cases}$.

(4) Виконати дії:

(а) $\frac{(1 + i)^{13}}{(1 - i)^3}$;

(б) $\frac{(1 - i)^{15}}{(1 + i)^7}$.

§ 3. Спряженість

Число $a - bi$, яке відрізняється від числа $\alpha = a + bi$ тільки знаком при уявній частині, називається числом, *комплексно спряженим* із α. Позначається $\overline{\alpha} = a - bi$. Очевидно, що

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \tag{3.1}$$

тобто мова завжди вестиметься про пару спряжених чисел (рис. 3.1)

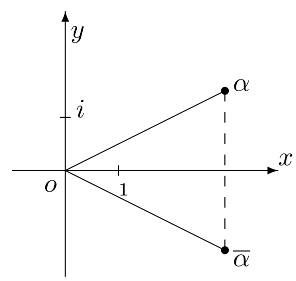


Рис.3.1

Властивості спряжених комплексних чисел:

(1) Сума і добуток спряжених комплексних чисел є дійсними числами.

Дійсно,

$$\alpha + \overline{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

(2) Число, спряжене із сумою двох комплексних чисел, дорівнює сумі чисел, які спряжені з доданками.

Дійсно,

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$$

$$= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{\alpha} + \overline{\beta}. \tag{3.2}$$

Аналогічно доводиться і наступна властивість, яка стосується числа, спряженого з різницею двох комплексних чисел:

$$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}. \tag{3.3}$$

(3) Число, спряжене з добутком двох комплексних чисел, дорівнює добутку чисел, спряжених із співмножниками.

Дійсно,

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i =$$

$$= (ac - adi) - (bd + bci) = a(c - di) - b(d + ci) = a(c - di) - bi(-di + c) =$$

$$= a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi)(c - di) = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}. \tag{3.4}$$

Аналогічно доводиться властивість, яка стосується числа, спряженого із часткою двох комплексних чисел:

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}. \tag{3.5}$$

Як узагальнення доведеного вище, можна сформулювати наступну властивість (яка легко доводиться методом математичної індукції).

(4) Якщо деяке комплексне число виражається через комплексні числа $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ за допомогою операцій додавання, віднімання, множення і ділення, то після заміни в ньому всіх чисел α_i $(i = 1, 2, ..., k)$ спряженими їм числами, отримаємо число $\overline{\alpha}$, спряжене з α.

Із співвідношень (3.2), (3.4) і (3.1) відповідно, випливає, що відображення, яке кожному комплексному числу ставить у відповідність комплексно спряжене з ним число, є автоморфізмом поля $\mathbb{C}$ комплексних чисел (порядку 2). Нагадаємо, що ***автоморфізмом*** множини називають ізоморфне відображення множини на себе.

Вправи. (1) Для комплексних чисел $\alpha = 3 - 4i$ та $\beta = 1 + 2i$ знайти:

(а) $2\alpha - \overline{\beta}$;
(б) $2\overline{\alpha} - \beta$;
(в) $\overline{\alpha} - 3\overline{\beta}$;
(г) $\overline{\alpha} + 2\beta$.

(2) Розв'язати рівняння:

(а) $\overline{z} = 2 - z$;
(б) $\overline{z} + 2z - 2 + i = 0$;
(в) $z^2 + 2\overline{z} - 1 = 0$;
(г) $z^2 + z \cdot \overline{z} = 8 - 4i$.

§ 4. Геометричне зображення комплексних чисел

Розглянемо питання про геометричне зображення комплексних чисел. Вибравши на площині декартову прямокутну систему координат xOy і зобразивши довільне комплексне число $a + bi$ точкою (a, b) цієї площини, встановимо цим самим між множиною всіх комплексних чисел і сукупністю всіх точок площини взаємно однозначну відповідність:

$$a + bi \Longleftrightarrow (a, b). \tag{4.1}$$

Оскільки дійсні числа зображуються згідно (4.1) точками осі абсцис, то цю вісь називають *дійсною віссю.* Уявні числа вигляду bi зображуються при цьому точками осі ординат, яку називають *уявною віссю.* Площину ж, між точками якої і комплексними числами встановлено взаємно однозначну відповідність (4.1), називають *комплексною площиною (площиною Гаусса).*

Геометрична інтерпретація комплексних чисел як точок площини, що розглядаються в декартовій системі координат, є зручною для ілюстрації дій додавання і віднімання комплексних чисел. Для цього поставимо у відповідність довільному комплексному числу $\alpha = a + bi$ вектор $\vec{\alpha}$, початок якого є початком координат, а кінець – точкою (a, b). Цим буде встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною всіх комплексних чисел і сукупністю всіх векторів площини, які виходять з початку координат. За цих умов дії додавання і віднімання комплексних чисел можна проілюструвати геометрично: додавання комплексних чисел (векторів площини) здійснюється за правилом паралелограма додавання векторів площини, а віднімання – за правилом трикутника (рис.4.1, рис.4.2).

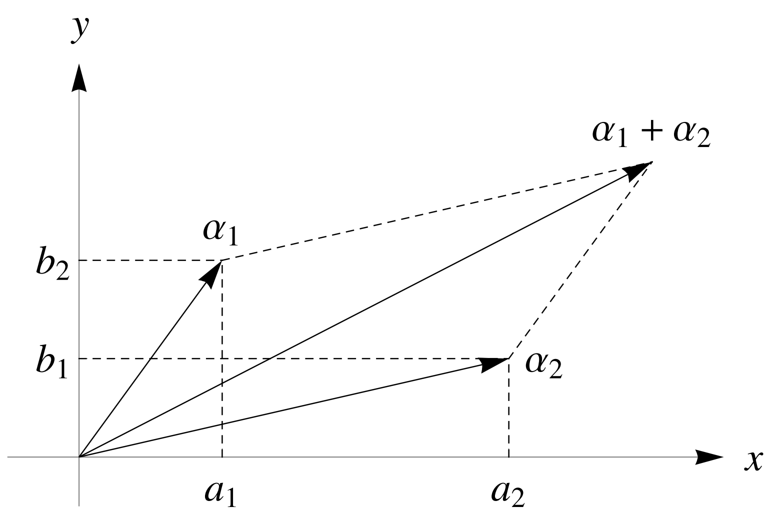


Рис. 4.1

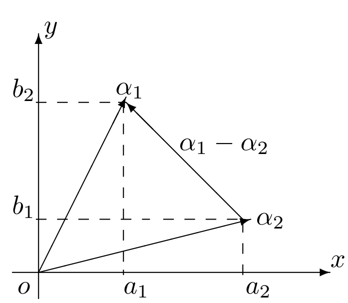


Рис. 4.2

Враховуючи, що модулем числа вважається відстань від точки, яка зображає це число, до початку координат, та використовуючи відомі співвідношення між сторонами трикутника, розглянемо наступні властивості модуля суми і різниці двох комплексних чисел.

(1) Модуль суми двох комплексних чисел не перевищує суми модулів цих чисел, тобто

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|;$$

(2) Модуль різниці двох комплексних чисел не менший від модуля різниці модулів цих чисел, тобто

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \Big||\alpha_1| - |\alpha_2|\Big|.$$

Однак для ілюстрації дій додавання і множення комплексних чисел інтерпретація цих чисел за допомогою точок площини, які розглядаються в декартовій системі координат, є незручною. Для цього випадку користуються іншою геометричною інтерпретацією комплексних чисел, яка подає їх у новій формі, використовуючи полярну систему координат. Відомо, що полярними координатами вектора $\vec{\alpha}$ є його довжина r і кут φ, утворений $\vec{\alpha}$ з додатним напрямом осі OX(рис.4.3).

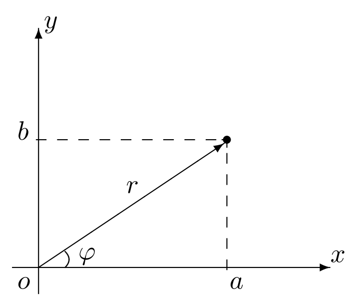


Рис. 4.3

Вправи. (1) Знайти геометричне місце точок z комплексної площини, що задовільняють умови:

(а) $1 < Re\ z \leq 3$;
(б) $|Im\ z| > \frac{1}{2}$;
(в) $|z - i| \leq 1$;
(г) $\frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$.

(2) Знайти межі аргументів комплексних чисел, які задовільняють умови:

(а) $|z + i| \leq 1$;
(б) $|z - 2| < 2$.

§ 5. Тригонометричний вигляд комплексного числа

Виразивши декартові координати кінця вектора $\vec{\alpha}$ через його полярні координати, отримаємо:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Звідси комплексне число (1.5) запишеться у вигляді:

$$\alpha = (a, b) = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{5.1}$$

Останній запис називається *тригонометричною формою* комплексного числа. *Модулем* (абсолютним значенням) комплексного числа α називають невід'ємне дійсне число $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha}}$. Із алгебраїчної та тригонометричної форм подання комплексного числа (1.5), (5.1) і рис. (4.3) випливає, що

$$|\alpha| = r = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{5.2}$$

Кут φ між напрямом з початку координат на число α і додатним напрямом осі абсцис називають *аргументом* комплексного числа α і позначають $\arg\alpha$. Із рис. (4.3) видно, що

$$\varphi = \arg\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \tag{5.3}$$

При заданому r кути, які відрізняються на ціле кратне 2π, відповідають одному і тому ж комплексному числу, тобто аргумент визначається з точністю до доданків, кратних 2π. Тому поряд із записом (5.1) можна записати і так:

$$\alpha = a + bi = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)). \tag{5.4}$$

Звідси рівність двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, означає, що модулі цих чисел рівні, а аргументи можуть відрізнятися на число, кратне 2π.

При заданні комплексного числа в тригонометричній формі аргумент φ в більшості випадків беруть з інтервалу $[0; 2\pi]$. Для знаходження кута φ користуються не формулою (5.3), а двома співвідношеннями

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \tag{5.5}$$

оскільки значення тригонометричної функції не дозволяє визначити, в якій чверті знаходиться кут φ.

Аргумент не визначений для числа 0, яке має модуль $|0| = 0$, що підтверджується і формулами (5.5).

Перейдемо до питання виконання дій над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі. На відміну від додавання і віднімання комплексних чисел, заданих в алгебраїчній формі, виконання цих операцій у випадку задання їх у тригонометричній формі є незручним. В той же час тригонометрична форма є зручнішою для виконання дій множення і ділення комплексних чисел.

1.1. Теорема. *Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників, тобто*

$$|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|, \quad \arg(\alpha_1\alpha_2) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2.$$

Доведення. Нехай $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Тобто

$$|\alpha| = |\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|, \qquad \arg\alpha = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2. \tag{5.6}$$

□

Доведене твердження поширюється на довільне скінченне число множників.

1.2. Теорема. *Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого й дільника, а аргумент частки – різниці аргументів діленого й дільника, тобто*

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}, \qquad \arg\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \arg\alpha_1 - \arg\alpha_2, \qquad (\alpha_2 \neq 0).$$

Доведення. Нехай $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Звідси $\alpha_1 = \alpha \cdot \alpha_2. \qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = rr_2(\cos(\varphi + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_2))$.

$$r_1 = rr_2 \Longrightarrow r = \frac{r_1}{r_2} \Longleftrightarrow \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|}. \tag{5.7}$$

$\varphi_1 = \varphi + \varphi_2$ (без врахування періодичності) $\Longrightarrow \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Longleftrightarrow \arg\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \arg\alpha_1 - \arg\alpha_2$. □

Користуючись співвідношенням для знаходження модуля та аргумента частки двох комплексних чисел, легко відшукати вираз для запису комплексного числа, оберненого до заданого. Дійсно, із того, що $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0), \quad \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, випливає

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{-1}(\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

тобто $|\alpha^{-1}| = \frac{1}{|\alpha|}, \quad \arg\alpha^{-1} = -\arg\alpha$.

Проілюструємо геометрично дії додавання і множення комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі (користуючись формулами (5.6) і (5.7)). Нехай $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Для зображення добутку $\alpha_1\alpha_2$ треба напрямлений відрізок, що з'єднує точку 0 з точкою α_1, повернути на кут φ_2 навколо початку координат і подовжити (стиснути) його в r_2 разів. Для зображення частки $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ двох комплексних чисел треба напрямлений відрізок, що з'єднує точку 0 з точкою α_1, повернути на кут $-\varphi_2$ навколо початку координат і стиснути (подовжити) в r_2 разів.

Вправи. (1) Подати числа у тригонометричній формі:

(a) 2;

(б) $-5i$;
(в) $1-i$;
(г) $\sqrt{3}-i$;
(д) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$;
(е) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
(є) $\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ$;
(ж) $\sin\alpha - i\cos\alpha$.

(2) Обчислити:

(а) $(\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ)(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ)(\sin 45^\circ - i\cos 45^\circ)(\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ)$;
(б) $\frac{\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + i\cos 60^\circ}$.

(3) Знайти обернене до числа:

(а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$;
(б) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

§ 6. Піднесення до степеня. Формула Муавра

Використовуючи співвідношення (5.6), можна отримати загальну формулу для піднесення комплексного числа до довільного цілого показника, яку названо *формулою Муавра.*

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Або, інакше:

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n, \quad \arg\alpha^n = n\cdot\arg\alpha. \tag{6.1}$$

Доведемо записані співвідношення.

Доведення. а) Нехай $n\in\mathbb{N}$. Скористаємось методом математичної індукції за показником степеня. Для $n=2$ формула (6.1) випливає із (5.6) при $\alpha_1 = \alpha_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Припустимо, що співвідношення (6.1) виконуються для натурального числа $2\le k<n$ і перевіримо їх справедливість для $n=k+1$.

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1} &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k+1} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= \left[r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\right]\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= r^k\cdot r\left(\cos(k\varphi+\varphi) + i\sin(k\varphi+\varphi)\right] = r^{k+1}\left[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi\right].\end{aligned}$$

Таким чином, твердження (6.1) виконується для всіх $n\in\mathbb{N}$.

б) Нехай $n\in\mathbb{Z}_-$, тобто $n=-m$, де $m\in\mathbb{N}$.

Тоді

$$\begin{gathered}[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-m} = \\ = \frac{1}{[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} = \frac{1}{r^m}\cdot\frac{1}{(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)}\cdot\frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos m\varphi - i\sin m\varphi} = \\ = \frac{1}{r^m}\cdot\frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi)} = \frac{1}{r^m}\cdot(\cos m\varphi - i\sin m\varphi) = \\ = \frac{1}{r^m}\left[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)\right] = r^{-m}\left[\cos(-m)\varphi + i\sin(-m)\varphi\right] = \\ = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\end{gathered}$$

що й вимагалось довести.

в) При $n = 0$ справедливість співвідношень (6.1) є очевидною. □

Формула Муавра дає можливість отримати вираження синусів і косинусів кратного кута. Розкладемо ліву частину рівності $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, отриману із (6.1) при $r = 1$, за формулою бінома Ньютона:

$$\begin{gathered}\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \\ = \cos^n\varphi + C_n^1 i\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi + C_n^2 i^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \cdots + \\ + C_n^{n-1} i^{n-1}\cos\varphi\cdot\sin^{n-1}\varphi + i^n\cdot\sin^n\varphi.\end{gathered}$$

Після прирівнювання окремо дійсних частин і коефіцієнтів уявних частин попередньої рівності отримаємо вирази $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \sum_{k\geq 0}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\cdot\sin^{2k}\varphi,$$

$$\sin n\varphi = \sum_{k\geq 0}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\varphi\cdot\sin^{2k+1}\varphi. \qquad (6.2)$$

Історична нотатка. Абрахам де Муавр (1667-1754) – англійський математик французького походження. Вніс значний науковий вклад у розвиток аналізу і теорії ймовірності. Відкрив (1707) у неявному вигляді формулу для піднесення до степеня (і добування коренів) комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі. Сучасного вигляду формулі Муавра надав Леонард Ойлер (1748).

Вправи. (1) Обчислити:

(а) $(1-i)^{2013}$;

(б) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{60}$;

(в) $(-\sqrt{2}+\sqrt{6}i)^{2014}$;

(г) $(\sqrt{12}-2i)^{48}$.

(2) Виразити через $\cos x$ і $\sin x$:

(а) $\cos 5x$;

(б) $\sin 6x$;

(в) $\cos 7x$;

(г) $\sin 8x$.

(3) Довести, що $\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}$.

§ 7. Добування коренів із комплексного числа

Розглянемо питання про добування коренів із комплексного числа. *Коренем n-го степеня* ($n \in \mathbb{N}$) з комплексного числа α називають таке α', що $(\alpha')^n = \alpha$. Позначають $\alpha' = \sqrt[n]{\alpha}$.

Добування коренів 2-го степеня з комплексного числа $\alpha = a + bi$, заданого в алгебраїчній формі, тобто знаходження таких чисел $x + iy$, що $\sqrt{a+bi} = x + iy$, дає (після піднесення обох частин до квадрату і прирівнювання дійсних та уявних частин) систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \end{cases}$$

звідки випливає наступний вигляд x та y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}, \tag{7.1}$$

причому, оскільки знак добутку xy має збігатися із знаком числа b, то при $b > 0$ знаки x та y співпадають, а при $b < 0$ – протилежні.

Спроба добути корені 3-го степеня з комплексного числа $\alpha = a + bi$, заданого в алгебраїчній формі, приводить до необхідності знаходження кубічних коренів із комплексного числа, тому добування коренів 3-го і вищих степенів з комплексного числа в загальному вигляді є практично неможливим.

Однак відповідь на питання, чи завжди можна добути корені довільного степеня із комплексного числа, є позитивною, і допоможе розв'язати це завдання формула Муавра, в якій запис комплексного числа має тригонометричний вигляд.

Для знаходження комплексного числа $\alpha^{'} = r^{'}(\cos\varphi^{'} + i\sin\varphi^{'})$, такого, що $(\alpha^{'})^n = \alpha$, тобто для добування кореня n-го степеня з комплексного числа α, виразимо обидві частини останньої рівності в тригонометричній формі, скористаємось формулою Муавра і прирівняємо модулі та аргументи обох частин. Отримаємо:

$$(r^{'})^n = r \quad \text{і} \quad n\varphi^{'} = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

($2\pi k$ з'явилося із-за неявної визначеності аргумента). Звідси: $r^{'} = \sqrt[n]{r}$ (де права частина є арифметичним значенням кореня n-го степеня з додатнього дійсного числа),

$$\varphi' = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ для $\alpha^{'}$ буде отримано n різних значень, причому цими значеннями вичерпаються всі корені, оскільки із $k = nq + r$, де $0 \le r \le n-1$, випливає, що

$$\varphi' = \frac{\varphi + 2\pi(nq + r)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q.$$

Таким чином, можемо сформулювати твердження.

1.3. Твердження. *Операція добування кореня n-го степеня із комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ завжди здійсненна. Всі n значень кореня n-го степеня із α визначаються за формулою*

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7.2}$$

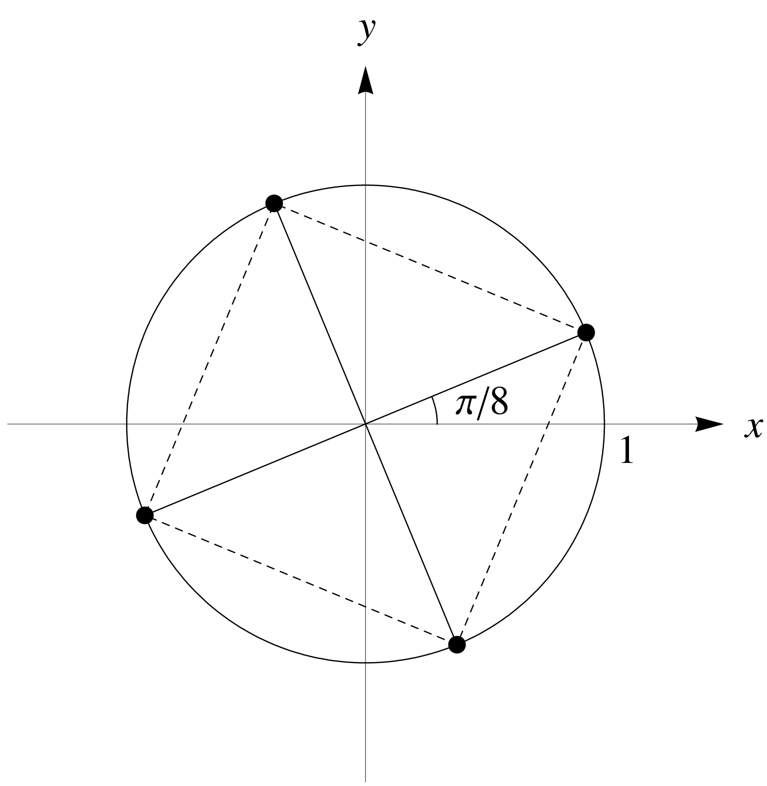
і розміщені у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{|\alpha|} = \sqrt[n]{r}$.

Аргумент першого кореня ($k = 0$) дорівнює $\frac{\varphi}{n}$, аргументи всіх наступних коренів отримаємо послідовним додаванням кута $\frac{2\pi}{n}$.

Приклади. 1) Зобразимо значення коренів 4-го степеня з числа i.

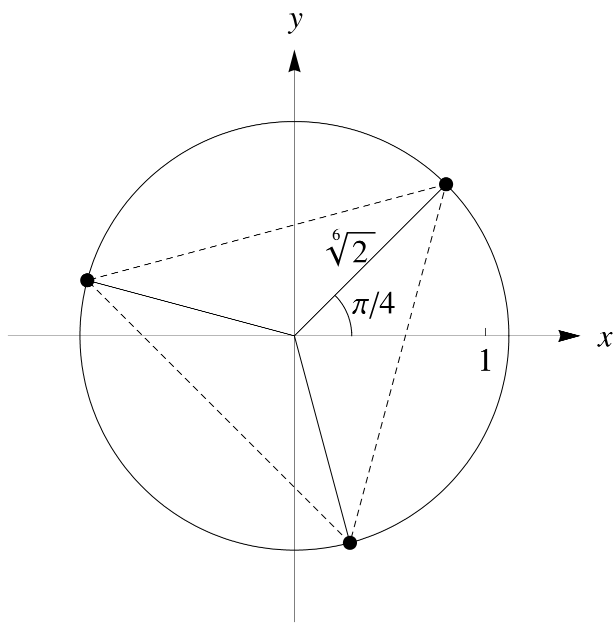
$i = 0 + 1i$, $a = 0$, $b = 1$. Тому $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k) + i\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k)\right), \quad k = 0,1,2,3.$$



2) Зобразити значення коренів 3-го степеня з числа $i - 1$.

$a = -1$, $b = 1$. Тому $r = \sqrt{2}$,
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$. $\sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k)\right)$,
$k = 0,1,2$.



Вправи. (1) Добути корені:

(а) $\sqrt[3]{3-3i}$;
(б) $\sqrt[6]{-i}$;
(в) $\sqrt[8]{i}$;
(г) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}}$.

(2) Знаючи, що один із коренів $\sqrt[4]{-16}$ є $2(\cos\pi + i\sin\pi)$, знайти всі інші значення коренів.

§ 8. Комплексні корені з 1. Група $\mathbb{C}_n$

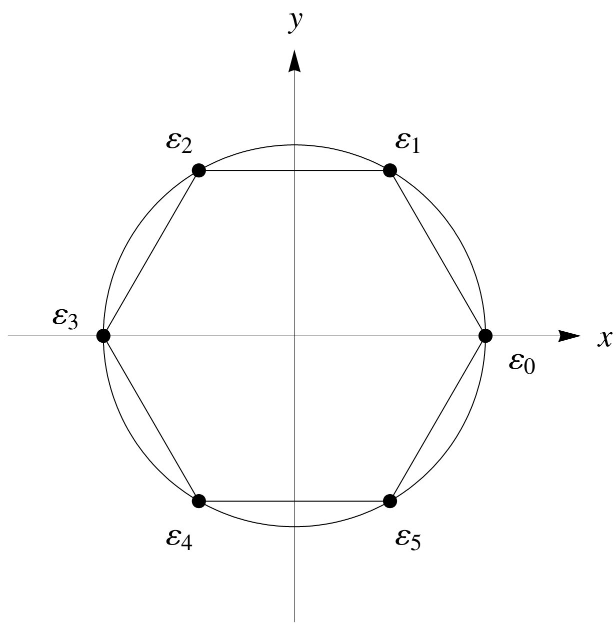
Для коренів n-го степеня з одиниці, підставивши у формулу (7.2) $r = 1$, $\varphi = 0$, можна отримати наступний вираз:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8.1}$$

Позначаються ці корені ϵ_k і зображаються вершинами n-кутника, вписаного в коло одиничного радіуса з центром в початку координат. Перший із коренів $\epsilon_0 = 1$ лежить на дійсній додатній півосі.

Приклади. 1) $\sqrt[2]{1}$ має два значення: $1; -1$.
$\sqrt[3]{1}$ має три значення: $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sqrt[4]{1}$ має чотири значення: $1, i, -1, -i$.

2) Зобразити всі значення $\sqrt[6]{1}$.



Із формул (7.2) та (8.1) випливає, що дійсних коренів $\sqrt[n]{\alpha}$ може бути нуль, один або два, а коренів $\sqrt[n]{1}$ – один або два.

Кожен корінь n-го степеня з одиниці є одночасно коренем з одиниці степеня $n \cdot m$, де $m \in \mathbb{N}$. Це означає, що якщо n – складене число, тобто $n = s \cdot t$, де $s, t \neq 1, n$, то в множині всіх коренів n-го степеня з одиниці є корені, які одночасно є коренями s-го і t-го степенів з одиниці. Наприклад, серед коренів 8-го степеня з одиниці є: $1; -1$, які є коренем також 2-го і 4-го степеня з одиниці, i та $-i$, які є коренями 4-го степеня з одиниці. Однак, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, серед коренів n-го степеня з одиниці є і такі, які не є коренями з одиниці ніякого меншого за n степеня. Таким, наприклад, коренем n-го степеня з одиниці, є $\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, оскільки для всіх $k \in \mathbb{N}(k < n)$ отримаємо:

$$(\epsilon_1)^k = (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \epsilon_k \neq 1.$$

Зокрема, таким є корінь 8-го степеня з одиниці $\epsilon_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

1.4. Означення. Корінь n-го степеня з одиниці називається *первісним (або примітивним)*, якщо він не є коренем ніякого меншого степеня.

Крім ϵ_1, є й інші первісні корені n-го степеня з одиниці.

1.5. Теорема. *Корінь n-го степеня з одиниці ϵ_k є первісним тоді і тільки тоді, коли $(k, n) = 1$.*

Доведення. Нехай $(k, n) = d > 1$, тоді $k = dk_1, n = dn_1$, і із того, що $n_1 < n$, маємо:

$$\epsilon_k^{n_1} = \left(\cos\tfrac{2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k}{n}\right)^{n_1} = \cos\tfrac{2\pi k n_1}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k n_1}{n} =$$
$$= \cos\tfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} = \cos\tfrac{2\pi k_1 n}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k_1 n}{n} =$$
$$= \cos 2\pi k_1 + i\sin 2\pi k_1 = 1,$$

тобто $(\epsilon_k)^{n_1} = 1$, тобто ϵ_k не є первісним коренем.

Якщо $(k, n) = d = 1$, то із припущення, що ϵ_k є коренем з одиниці степеня $m < n$, матимемо:

$$(\epsilon_k)^m = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^m = \cos 2\pi\frac{km}{n} + i\sin 2\pi\frac{km}{n} = 1.$$

А оскільки комплексне число $\cos 2\pi\frac{km}{n} + i\sin 2\pi\frac{km}{n}$ дорівнює одиниці тоді і тільки тоді, коли його аргумент кратний числу 2π, то $\frac{km}{n}$ – ціле число, тобто km ділиться на n. Це означає, що всі прості множники канонічного числа n зустрічаються в канонічному розкладі числа k, або числа m. Із $m < n$ випливає, що прості множники числа n не вичерпуються простими множниками числа m, тобто принаймні один із простих множників числа n є простим множником числа k, а, значить, числа k і n не є взаємно простими, що суперечить умові $(k, n) = d = 1$. Значить припущення, що ϵ_k є коренем з одиниці степеня $m < n$, є невірним, тобто ϵ_k є коренем з одиниці числа n. □

1.6. Наслідок. *Кількість первісних коренів n-го степеня з одиниці дорівнює кількості натуральних чисел, менших за n і взаємно простих з n.*

Приклад. *Знайти первісні корені 8-го степеня з одиниці.* $(k, 8) = 1 \to k = 1, 3, 5, 7$. *Отже, первісні корені 8-го степеня з одиниці:* $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_7$.

1.7. Означення. *Порядком числа* ϵ_k, яке є коренем n-го степеня з одиниці, називають найменше натуральне число δ таке, шо $(\epsilon_k)^\delta = 1$.

1.8. Теорема. *Якщо α' – довільний фіксований корінь n-го степеня з комплексного числа α, то всі інші корені мають вигляд $\alpha' \cdot \epsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, де ϵ_k – корінь n-го степеня з одиниці.*

Доведення. Якщо α' – один із коренів n-го степеня з числа α, тобто $(\alpha')^n = \alpha$, а ϵ_k – довільний корінь n-го степеня з одиниці, тобто $(\epsilon_k)^n = 1$, то

$$(\alpha' \epsilon_k)^n = (\alpha')^n \cdot (\epsilon_k)^n = \alpha \cdot 1 = \alpha,$$

тобто $\alpha' \cdot \epsilon_k$ теж є одним із коренів n-го степеня з числа α.

Тоді кожен із добутків $\alpha' \cdot \epsilon_0, \alpha' \cdot \epsilon_1, \ldots, \alpha' \cdot \epsilon_{n-1}$ є одним із коренів n-го степеня з числа α. Якщо $0 \le s \le n-1$ і $0 \le t \le n-1$ і $s \ne t$, то $\alpha' \cdot \epsilon_s \ne \alpha' \cdot \epsilon_t$, оскільки в іншому випадку ϵ_s дорівнювало б ϵ_t, що неможливо. Значить, всі записані добутки є різними коренями n-го степеня з числа n, а оскільки їх n, то ними і вичерпуються всі n коренів. □

Приклад. *Знайти всі інші корені 4-го степеня з числа i, знаючи один із цих коренів, зокрема, $\alpha^{'} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$.*

Для отримання відповіді, помножимо $\alpha^{'}$ на всі корені 4-го степеня з одиниці:

$\alpha^{'} \cdot \epsilon_0 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot 1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$,

$\alpha^{'} \cdot \epsilon_1 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot i = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$,

$\alpha^{'} \cdot \epsilon_2 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot (-1) = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$,

$\alpha^{'} \cdot \epsilon_3 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot (-i) = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) \cdot (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = (\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8})$.

1.9. Теорема. *Множина всіх коренів n-го степеня з одиниці утворює циклічну групу $\langle\epsilon\rangle$ порядку n.*

Доведення. Якщо ϵ_s і ϵ_t – довільні корені n-го степеня з одиниці, тобто $(\epsilon_s)^n = 1$ і $(\epsilon_t)^n = 1$, то і їх добуток $\epsilon_s \cdot \epsilon_t$ буде коренем n-го степеня з одиниці, оскільки $(\epsilon_s \cdot \epsilon_t)^n = (\epsilon_s)^n \cdot (\epsilon_t)^n = 1 \cdot 1 = 1$. Операція множення на множині корнів n-го степеня з одиниці є асоціативною, оскільки зводиться до додавання їх індексів (а, значить, і комутативною). У цій множині міститься й одиничний елемент $\epsilon_0 = 1$, а для кожного кореня ϵ_k в цій же множині існує обернений елемент $\epsilon_k^{-1} = \epsilon_{n-k}$, оскільки $\epsilon_k \cdot \epsilon_{n-k} = \epsilon_n = 1$.

Таким чином, множина коренів n-го степеня з одиниці утворює мультиплікативну абелеву групу. Із того, що $\epsilon_k = \epsilon_1^k$ випливає, що отримана група є циклічною групою $\langle\epsilon\rangle$ порядку n. □

Отриману циклічну групу коренів n-го степеня з одиниці позначають $\mathbb{C}_n$. Корінь ϵ_k буде первісним тоді і тільки тоді, коли $\langle\epsilon_k\rangle = \langle\epsilon\rangle$, тоді $Card\langle\epsilon_k\rangle = Card\langle\epsilon\rangle = n$, а це можливо тільки при $(k, n) = 1$.

Вправи. (1) Написати корені з одиниці степеня:

(а) 6;
(б) 8;
(в) 12;
(г) 16.

(2) Знайти первісні корені степеня:

(а) 4;
(б) 6;
(в) 12;
(г) 16.

(3) Знайти порядки всіх коренів 12-го степеня з одиниці.

(4) Скласти таблицю Келі для мультиплікативної групи коренів 8-го степеня з одиниці.

(5) Знаючи, що $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$ є одним із значень $\sqrt[6]{z}$, знайти всі значення $\sqrt[6]{z}$.

Бібліографія

[1] С.Т. Завало, *Курс алгебри.* – Київ, Вища школа, 1985, – 504с.

[2] А.И. Кострикин, *Введение в алгебру.* – М., Наука, 1977. – 496с.

[3] А.Г. Курош, *Курс высшей алгебры.* – М., Наука, 1975. – 432с.

[4] Л.Я. Окунев, *Высшая алгебра.* – М., Учпедтиз, 1958. – 336с.

[5] Д.К. Фаддеев, *Лекции по алгебре.* – М., Наука, 1984. – 416с.

[6] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa.* – Wroclaw, Oficyna Wydawnicza G:S, 2004. – 208s.

[7] С.Т. Завало, С.С. Левіщенко, В.В. Пилаєв, І.О. Рокицький, *Алгебра і теорія чисел. Приклади ч.1.* – Київ, Вища школа, 1983, – 232с.

[8] Л.Я. Окунев, П.И. Титов, *Сборник задач по вышей алгебре.* – М., Просвещение, 1964, – 184с.

[9] Д.К. Фадєєв, І.С. Сомінський, *Збірник задач з вищої алгебри.* – Київ, Вища школа, 1971, – 316с.